〈教室剪影〉
$\sqrt{2}$ 是無理數的一個圖示證明

蕭文強
香港大學數學系

好幾年前我寫了一則短文，題為「$\sqrt{2}$ 是無理數的六個證明」（*Datum*，36（1997），14-17 頁）。其中一個巧妙簡捷的證明，是數論專家 Theodor Estermann 提出的（*Mathematical Gazette*，59（1975）， 110）：若 $\sqrt{2}$ 是有理數，取最小正整數 k 使 $k\sqrt{2}$ 是整數，則 $m = k\sqrt{2} - k = k(\sqrt{2} - 1)$ 是一個較 k 更小的正整數，但 $m\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2}$ 仍是整數，與 k 的選取矛盾！

在同一則短文裏，我也討論了一個可能的幾何詮釋，以說明這個巧妙簡捷的證明中 m 的構作，也許就是古代希臘 Pythagoras 學派發現不可公度量的線索。在這裏讓我們再次利用 Pythagoras 學派熟悉的知識，從另一個角度詮釋 Estermann 的證明。我是從友人 Jan van Maanen 那兒得悉這個「無言的證明」，據他說，那是發表於一篇 1971 年的文章 (H.-J. Waschkies, Eine neue Hypothese zur Entdeckung der inkommensurablen Gröβen durch die Griechen，*Archive for History of Exact Sciences*，7（1971），325-353) 。

設 $\sqrt{2} = K/k$ 是不可再約的**最簡分數**。因為 $K^2 = 2k^2$，在 $K \times K$ 點陣（*ABCD*，參見圖 1, 頁 98）內，右上角和左下角的 $k \times k$ 點陣（*EYFD* 和 *GBHZ*）的點合起來正好與大的點陣的點有相同數目，因此，這兩個 $k \times k$ 點陣的交疊部份，是一個 $M \times M$ 點陣（*XYWZ*），它的點的數目正好是左上角和右下角的 $m \times m$ 點陣（*AGXE* 和 *WHCF*）的點合起來的數目，即是說 $M^2 = 2m^2$，或 $\sqrt{2} = M/m$。但是 $M < K$ 和 $m < k$，與 K 和 k 的選取矛盾！

注意到 $K = 2m + M$ 和 $k = m + M$ ，便知道 $M = 2k - K$ 和 $m = K - k$，那不就是 Estermann 的證明中的關鍵一步嗎？有趣的是，那幅圖畫（圖 1）其實是沒有可能畫出來的（因為 $\sqrt{2}$ 不是有理數），但它卻展示了這個反證法的底蘊，由此得到一個算術證明！

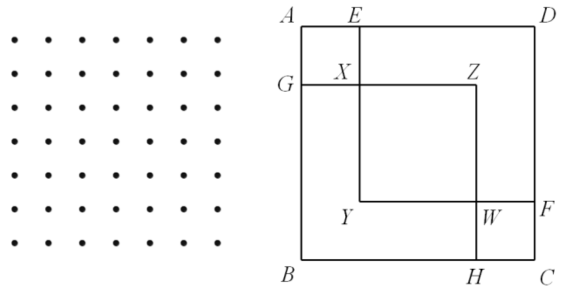

圖 1