

幾何條的數學

何詠欣

北角官立小學

楊麗琮

嘉諾撒聖家學校（九龍塘）

緒言

坊間提供不少幾何條套裝，給教師教授多邊形之用。一般來說，一套幾何條包含幾種不同長度的膠條，每種有若干條。師生可自由組合這些幾何條，製作小學數學課程中所涉及的多邊形，如直角三角形、直角梯形等等。用幾何條製作多邊形，有助教師具體及形象化地向學生展示抽象的數學概念，故幾何條可說是一件有效的教具（李婉婷、馮振業，2009，93）。另一方面，幾何條也是一件合適的學具，讓學生親自動手操作，藉著教師給定的幾何條，製作指定的多邊形，從中進行自由探索，並誘發屬於個人的想法及理解（李婉婷、馮振業，2009，93）。

但從一套幾何條中，隨意抽出若干條，一定能製作你心目中的那個多邊形嗎？若否，又能製作一個怎樣的多邊形呢？怎樣選取合適的幾何條分發給學生，才可確保他們能製作一個教師指定的多邊形呢？

為解答以上的疑問，我們嘗試把自己當作幾何條套裝的設計者，藉考慮小學數學課程中所涉及各種三角形和四邊形的邊長比例，找出製作這些多邊形所需的幾何條之間的長度比例，繼而設計一套不論長度種類和條數都是最少，卻能夠製作全部課程涵蓋的三角形和四邊形的幾何條。

我們的設計

表 1 顯示了小學各級課程中有關多邊形的認識及製作的課題，當中涉及的三角形和四邊形包括：等邊三角形、等腰三角形、直角三角形、等腰直角三角形、不等邊三角形、正方形、長方形、菱形、鶴形、平行四邊形、梯形、等腰梯形、直角梯形。

年級	課題	課題中出現的多邊形
一	平面圖形的認識	三角形、四邊形、五邊形、六邊形
二	四邊形認識	正方形、長方形、菱形、梯形
三	平行四邊形	平行四邊形
	三角形的認識	直角三角形、等邊三角形、等腰三角形、等腰直角三角形、不等邊三角形
四	認識四邊形	正方形、長方形、菱形、梯形（包括直角梯形和等腰梯形）、平行四邊形、(鶴形)

表 1：小學數學課程中涉及多邊形的認識及製作的課題

若只運用某一種長度的幾何條（設該幾何條的長度為 $X \text{ cm}$ ），可分別製作一個等邊三角形、正方形及菱形，它們的邊長均為 $X \text{ cm}$ 。故這套幾何條最少需要四條 $X \text{ cm}$ 長的幾何條。

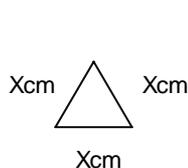


圖 1：等邊三角形

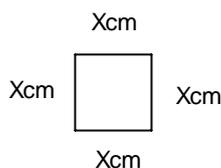


圖 2：正方形

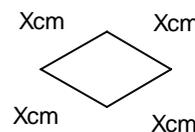


圖 3：菱形

我們的設計將會以現有的幾何條作製作基礎，然後嘗試逐漸加上另一種長度的幾何條，使它們能製作其他的三角形或四邊形，以確保發展出一套不論長度種類和條數都是最少的幾何條。首先，我們可運用兩條已有的 $X \text{ cm}$ 長的幾何條及新增一條 $\sqrt{2} X \text{ cm}$ 長的幾何條，製作一個等腰直角三角形。

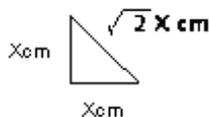


圖 4：等腰直角三角形

期後，運用 $X \text{ cm}$ 及 $\sqrt{2} X \text{ cm}$ 這兩種長度的幾何條，還可拼出一個長方形、平行四邊形及鶴形，它們分別各有兩條 $X \text{ cm}$ 長和 $\sqrt{2} X \text{ cm}$ 長的邊。現在為止，這套幾何條最少需要四條 $X \text{ cm}$ 長及兩條 $\sqrt{2} X \text{ cm}$ 長的幾何條。

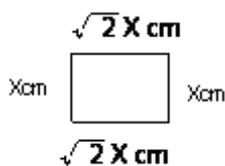


圖 5：長方形

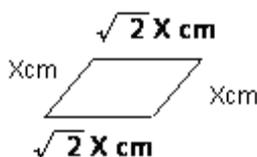


圖 6：平行四邊形

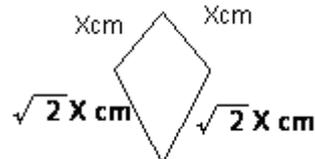


圖 7：鷓形

考慮到小學數學課堂中除了出現等腰直角三角形，還存在其他的直角三角形，故需新增一條 $\sqrt{3} X \text{ cm}$ 長的幾何條。

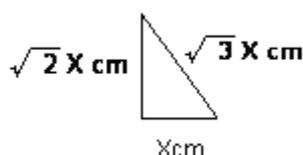


圖 8：直角三角形

我們發現運用已有的 $X \text{ cm}$ 、 $\sqrt{2} X \text{ cm}$ 及 $\sqrt{3} X \text{ cm}$ 這三種長度的幾何條製作等腰三角形，存在許多不同的組合。設 a 、 a 、 b 為三條直線，其中 a 、 a 為兩條相等長度的直線。 (a, a, b) 表示 a 、 a 及 b 這三條直線能組成一個等腰三角形。以下是一些可能組合的舉隅： $(X, X, \sqrt{3} X)$ 、 $(\sqrt{2} X, \sqrt{2} X, X)$ 、 $(\sqrt{2} X, \sqrt{2} X, \sqrt{3} X)$ 。

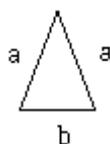


圖 9：等腰三角形

除了上述談及的各種三角形，還餘下不等邊三角形未作討論。需已知構作三角形的充要條件：設 a 、 b 、 c 為三種長度的直線，其中 $a > b > c$ 。若 $b + c > a$ ，這三條直線能組成一個三角形。但以現有的幾何條長度 ($X \text{ cm}$ 、 $\sqrt{2} X \text{ cm}$ 和 $\sqrt{3} X \text{ cm}$) 未能拼湊出一個不等邊三角形，故構作三角形的討論暫且到此，待下文討論梯形的構作後再繼續。

接著，我們會討論製作梯形。在討論如何製作各種梯形前，我們先以引理 A、引理 B 及一些定理說明若組成一個四邊形的四條直線能滿足製作梯形的兩個充要條件，這個四邊形必能透過一些移動而得出一個梯形。

引理 A

假設有四種長度 a 、 b 、 c 、 d 的幾何條各一，其中 $a \geq b \geq c \geq d > 0$ 。一般而言，

$$a + c \geq b + d, \quad (1)$$

且等式成立當且僅當 $a = b = c = d$ 。

證明：從略。

引理 B

假設有四種長度 a 、 b 、 c 、 d 的幾何條各一，其中 $a \geq b \geq c \geq d > 0$ 。能以這四種長度的幾何條製作一個四邊形的充要條件為

$$b + c + d > a. \quad (2)$$

證明：以三角形不等式推廣至四邊形而得，此處從略。

定理

假設有四種長度 a 、 b 、 c 、 d 的幾何條各一，其中 $a \geq b \geq c \geq d > 0$ 。能以這四種長度的幾何條製作一個梯形的充要條件為：

- (i) 四種長度並非完全相同；及
- (ii) $b + c + d > a$ 。

證明：

要製作梯形，四種長度不可以完全相同，即充要條件 (i)，再根據引理 B，即充要條件 (ii)，由此可知 (i) 及 (ii) 乃製作梯形必要條件。反過來，依 (i) 和引理 A 可知

$$a + c > b + d. \quad (3)$$

若 a 、 b 、 c 、 d 符合充要條件 (i) 及 (ii)，即可作得像下圖的梯形。

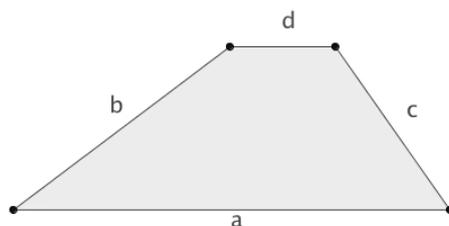
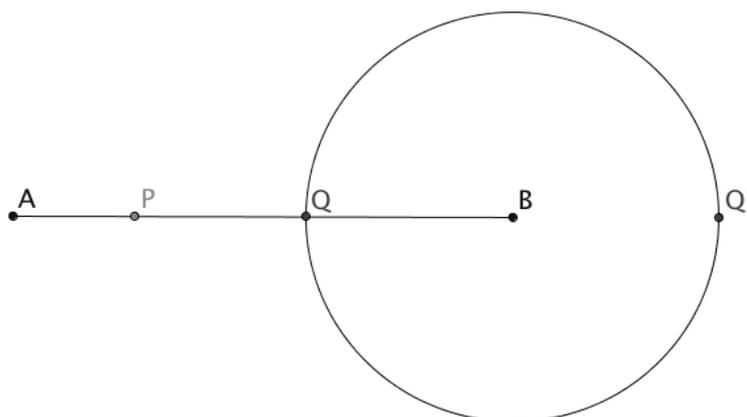


圖 10：梯形

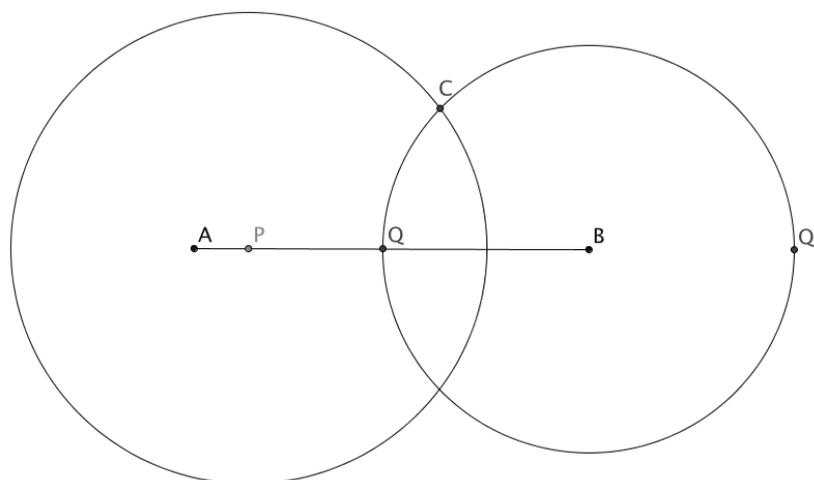
先作長度為 a 的線段 AB ，再在 AB 上作 P 點使 $AP = d$ 。由 $d > 0$ 及四種長度並非完全相同可知 P 不與 A 或 B 重疊。

以 B 為圓心， c 為半徑作圓 π ，與 AB 相交於 Q ($c \leq a$)， AB 延長相交於 Q' 。

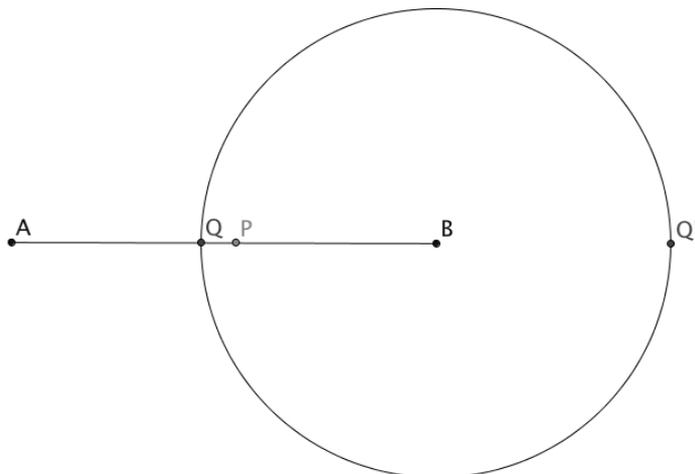
情況一： Q 在線段 PB 上



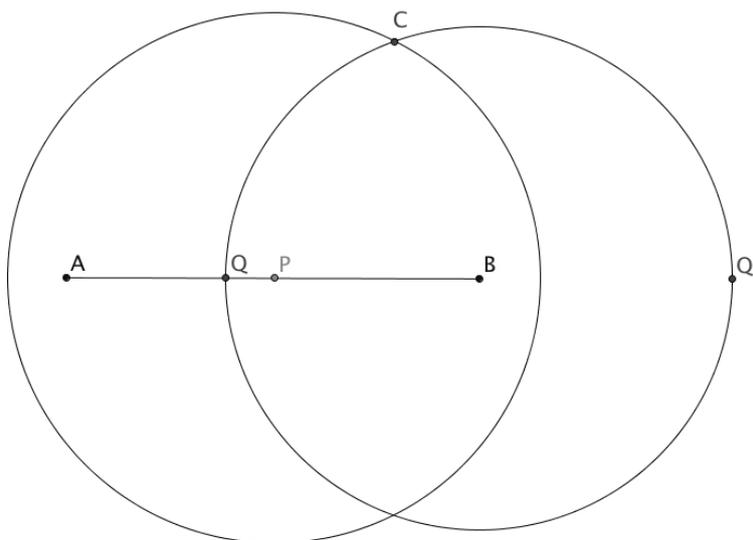
由 (3) 及 (ii) 知 $a - d + c > b > a - d - c$ ，表示以 P 為圓心， b 為半徑作圓，必與 π 有 Q 和 Q' 以外的交點。



情況二： Q 在線段 AP 上



由(3)知 $a - d + c > b$ ，注意 $PQ = c + d - a < c \leq b$ ，即知以 P 為圓心， b 為半徑作圓，必與 π 有 Q 和 Q' 以外的交點。



無論如何，以 P 為圓心， b 為半徑作圓，必與 π 有線段 AB 以外的交點 C ，作平行四邊形 $APCD$ ，即有所需梯形 $ABCD$ 。

條。考慮到以現有的幾何條作製作基礎，我們會藉著將圖 2（正方形）或圖 5（長方形）與圖 4 或圖 8 的直角三角形拼砌起來，得出一些直角梯形的組合。而在拼砌的過程中，會衍生另一種長度的幾何條作為直角梯形的一個底，包括： $2X$ cm 或 $(\sqrt{2} + 1)X$ cm 或 $2\sqrt{2}X$ cm 長的幾何條。以下是一些直角梯形組合的舉隅：

圖 2 及圖 4 的組合： $(2X, X, \sqrt{2}X, X)$

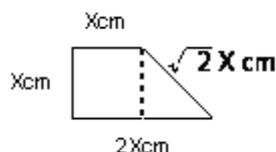


圖 11a：直角梯形

圖 5 及圖 8 的組合： $(2X, \sqrt{2}X, \sqrt{2}X, X)$

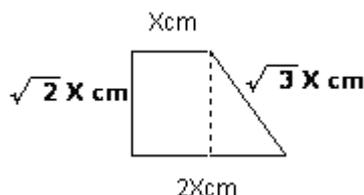


圖 11b：直角梯形

圖 5 及圖 4 的組合： $((\sqrt{2} + 1)X, X, \sqrt{2}X, \sqrt{2}X)$

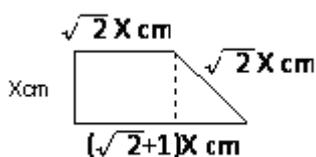


圖 11c：直角梯形

圖 2 及圖 8 的組合： $((\sqrt{2} + 1)X, X, \sqrt{3}X, X)$

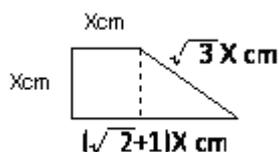


圖 11d：直角梯形

圖 5 及圖 8 的組合： $(2\sqrt{2}X, X, \sqrt{3}X, \sqrt{2}X)$

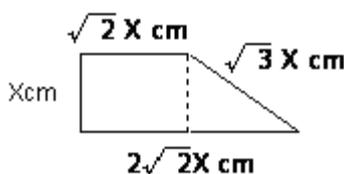


圖 11e：直角梯形

除了等腰梯形和直角梯形外，還存在一些梯形既沒有直角也沒有一對等邊，而這類梯形也有必要在課堂上展示給學生認識。最簡便的做法是選取四種不同長度的幾何條製作這類梯形，而我們剛好擁有四種長度的幾何條，分別為 $X\text{ cm}$ 、 $\sqrt{2}X\text{ cm}$ 、 $\sqrt{3}X\text{ cm}$ 及 $2X\text{ cm}$ 或 $(\sqrt{2}+1)X\text{ cm}$ 或 $2\sqrt{2}X\text{ cm}$ 。上文提到任何四條直線能組成一個四邊形，必能透過一些移動而得出一個梯形，而且這四種長度的幾何條也分別符合製作梯形的充要條件 (i) 及 (ii)，故這四種長度的幾何條能分別組成一個既沒有直角也沒有一對等邊的梯形，這些組合分別為： $(2X, \sqrt{3}X, \sqrt{2}X, X)$ 或 $(2\sqrt{2}X, \sqrt{3}X, \sqrt{2}X, X)$ 或 $((\sqrt{2}+1)X, \sqrt{3}X, \sqrt{2}X, X)$ 。

現在，我們可以回到不等邊三角形的討論了。以現有的幾何條能構作出一些不等邊三角形，如： $(X, \sqrt{2}X, 2X)$ 或 $(X, \sqrt{2}X, (\sqrt{2}+1)X)$ 或 $(X, \sqrt{2}X, 2\sqrt{2}X)$ 。

由以上篇幅的論述可見，這套幾何條最少包含四條 $X\text{ cm}$ 長、兩條 $\sqrt{2}X\text{ cm}$ 長、一條 $\sqrt{3}X\text{ cm}$ 長及一條 $2X\text{ cm}$ 長或 $(\sqrt{2}+1)X\text{ cm}$ 長或 $2\sqrt{2}X\text{ cm}$ 長的幾何條，以能夠製作全部課程涵蓋的三角形和四邊形的幾何條。

結語

總括而言，教師在教授「四邊形認識」及「認識四邊形」這兩個課題時，需預備四條 $X\text{ cm}$ 長、兩條 $\sqrt{2}X\text{ cm}$ 長、一條 $\sqrt{3}X\text{ cm}$ 長及一條 $2X\text{ cm}$ 長或 $(\sqrt{2}+1)X\text{ cm}$ 長或 $2\sqrt{2}X\text{ cm}$ 長的幾何條；在教授「平行四邊形」一課題時，需預備兩條 $X\text{ cm}$ 長、兩條 $\sqrt{2}X\text{ cm}$ 長的幾何條；在教授「三角形的認識」一課題時，需預備三條 $X\text{ cm}$ 長、一條 $\sqrt{2}X\text{ cm}$ 長、一條 $\sqrt{3}X\text{ cm}$ 長及一條 $2X\text{ cm}$ 長或 $(\sqrt{2}+1)X\text{ cm}$ 長或 $2\sqrt{2}X\text{ cm}$ 長的幾何條，以向學

生展示課題中所涉及的三角形或四邊形。

另外，教師可參閱附件中的表 2，分發所需的幾何條予學生，讓他們動手製作教師指定的多邊形。值得一提的是在分發幾何條時，教師可考慮只向學生提供製作某多邊形所需的幾何條，或多發額外的幾何條予學生，以增加製作活動的難度，考驗學生能否選取合適的幾何條製作指定的多邊形，但製作活動所需的時間會較長，這要視乎教師的教學需要，而作出選取。

參考資料

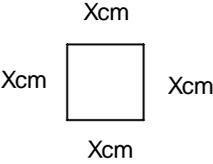
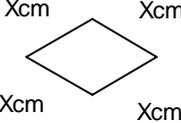
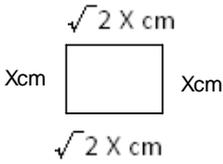
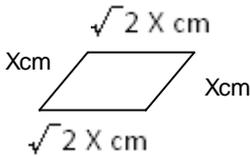
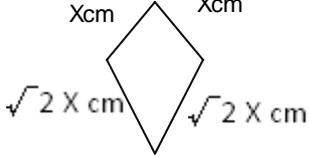
李婉婷、馮振業 (2009)。數學化教學的教具和學具應用。載黃家樂、李玉潔、潘維凱、鄧國俊 (編)。《香港數學教育會議 2009 論文集》(頁 93-104)。香港：香港數學教育學會。

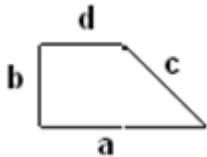
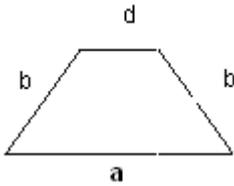
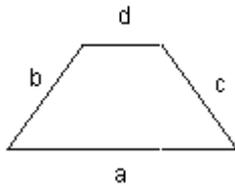
*謹在此感謝馮振業老師為本文提供許多寶貴的意見。謝謝！

作者電郵： saikokingyeung@gmail.com

附件

表 2 歸納了製作三角形及四邊形所需的幾何條的長度比例，當中 X 為單位幾何條的長度，作讀者一個參考。

圖形	性質	所需的幾何條 (舉隅)
四邊形	由四條線段圍成的凸多邊形	
正方形 	兩組對邊分別平行 有一組鄰邊相等 有一個角是直角	(X, X, X, X)
菱形 	兩組對邊分別平行 有一組鄰邊相等	(X, X, X, X)
長方形 	兩組對邊分別平行 有一個角是直角	$(X, \sqrt{2}X, X, \sqrt{2}X)$
平行四邊形 (四個角皆不是直角) 	兩組對邊分別平行	$(X, \sqrt{2}X, X, \sqrt{2}X)$
鵝形 	有兩組鄰邊相等	$(X, \sqrt{2}X, X, \sqrt{2}X)$

<p>梯形</p>	<p>只有一組對邊平行線的四邊形</p>	
<p>直角梯形</p> 	<p>有一腰垂直於底</p>	<p>(a, b, c, d) $(2X, X, \sqrt{2}X, X)$ 或 $(2X, \sqrt{2}X, \sqrt{3}X, X)$ $((\sqrt{2}+1)X, X, \sqrt{2}X, \sqrt{2}X)$ 或 $((\sqrt{2}+1)X, X, \sqrt{3}X, X)$ 或 $(2\sqrt{2}X, X, \sqrt{3}X, \sqrt{2}X)$</p>
<p>等腰梯形</p> 	<p>兩腰相等</p>	<p>(a, b, b, d) $(\sqrt{2}X, X, X, X)$ $(\sqrt{3}X, X, X, X)$ $(\sqrt{3}X, X, X, \sqrt{2}X)$ $(\sqrt{3}X, \sqrt{2}X, \sqrt{2}X, X)$</p>
<p>不等邊梯形</p> 	<p>四條邊的長度皆不相等</p>	<p>(a, b, c, d) $(2X, \sqrt{3}X, \sqrt{2}X, X)$ 或 $(2\sqrt{2}X, \sqrt{3}X, \sqrt{2}X, X)$ 或 $((\sqrt{2}+1)X, \sqrt{3}X, \sqrt{2}X, X)$</p>

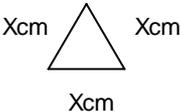
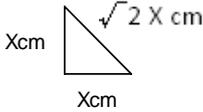
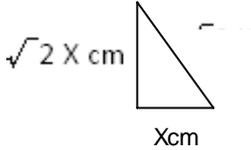
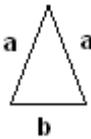
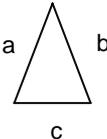
三角形	由三條線段圍成的封閉圖形	
等邊三角形 	三條邊都相等	(X, X, X)
等腰直角三角形 	三邊中有兩邊相等 有一個角是直角	$(X, X, \sqrt{2} X)$
直角三角形 	有一個角是直角	$(\sqrt{2} X, \sqrt{3} X, X)$
等腰三角形 	三邊中有兩邊相等	(a, a, b) $(X, X, \sqrt{3} X)$ $(\sqrt{2} X, \sqrt{2} X, X)$ $(\sqrt{2} X, \sqrt{2} X, \sqrt{3} X)$
不等邊三角形 	三邊兩兩不等	(a, b, c) $(X, \sqrt{2} X, 2X)$ 或 $(X, \sqrt{2} X, (\sqrt{2} + 1) X)$ 或 $(X, \sqrt{2} X, 2\sqrt{2} X)$

表 2