兩道習題的統一研究

秦慶雄、范花妹
雲南省大理州漾濞縣第一中學

在很多國內高中教輔書中，經常會出現以下兩道習題：

習題 1 若$a, b\in R^+$，且滿足$a+b=1$，則 $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geq\frac{25}{4}$；

習題 2 若$a, b\in R^+$，且滿足$a+b=1$，則 $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geq\frac{25}{2}$。

因為 $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geq 2(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})$，所以，習題 1 是習題 2 的一個加強。因此，我們得到如下一個不等式鏈：

命題 若$a, b\in R^+$，且滿足$a+b=1$，則

$$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geq 2(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geq\frac{25}{2}，$$

當且僅當$a=b$時，等號成立。

將其推廣，我們獲得如下定理：

定理 若$a_1,a_2,\cdots,a_n$為正數，且$\sum_{i=1}^{n}a_i=S$，$\alpha>0,\ n\geq 2$，$\lambda\geq(\frac{S}{n})^{2\alpha}$，則

$$(a_1^\alpha+\frac{\lambda}{a_1^\alpha})^n+(a_2^\alpha+\frac{\lambda}{a_2^\alpha})^n+\cdots+(a_n^\alpha+\frac{\lambda}{a_n^\alpha})^n$$

$$\geq\ n(a_1^\alpha+\frac{\lambda}{a_1^\alpha})(a_2^\alpha+\frac{\lambda}{a_2^\alpha})\cdots(a_n^\alpha+\frac{\lambda}{a_n^\alpha})$$

$$\geq\ n[(\frac{S}{n})^\alpha+\lambda(\frac{n}{S})^\alpha]^n \qquad (1)$$

筆者經過思考，給出（1）式一個非常簡捷、漂亮的證明。

證明 首先，由均值不等式，我們易證

$$(a_1^\alpha+\frac{\lambda}{a_1^\alpha})^n+(a_2^\alpha+\frac{\lambda}{a_2^\alpha})^n+\cdots+(a_n^\alpha+\frac{\lambda}{a_n^\alpha})^n\ge n(a_1^\alpha+\frac{\lambda}{a_1^\alpha})(a_2^\alpha+\frac{\lambda}{a_2^\alpha})\cdots(a_n^\alpha+\frac{\lambda}{a_n^\alpha})\text{。}$$

其次，我們證明 $(a_1^\alpha+\frac{\lambda}{a_1^\alpha})(a_2^\alpha+\frac{\lambda}{a_2^\alpha})\cdots(a_n^\alpha+\frac{\lambda}{a_n^\alpha})\ \ge[(\frac{S}{n})^\alpha+\lambda(\frac{n}{S})^\alpha]^n$ 。

記 $M_1=a_1^\alpha+\frac{\lambda}{a_1^\alpha}$ ，$M_2=a_2^\alpha+\frac{\lambda}{a_2^\alpha}$ ，…，$M_n=a_n^\alpha+\frac{\lambda}{a_n^\alpha}$ ，則

$$\begin{aligned}
n &= \frac{M_1}{M_1}+\frac{M_2}{M_2}+\cdots+\frac{M_n}{M_n}\\
&= \frac{a_1^\alpha+\frac{\lambda}{a_1^\alpha}}{M_1}+\frac{a_2^\alpha+\frac{\lambda}{a_2^\alpha}}{M_2}+\cdots+\frac{a_n^\alpha+\frac{\lambda}{a_n^\alpha}}{M_n}\\
&= (\frac{a_1^\alpha}{M_1}+\frac{a_2^\alpha}{M_2}+\cdots+\frac{a_n^\alpha}{M_n})+(\frac{\frac{\lambda}{a_1^\alpha}}{M_1}+\frac{\frac{\lambda}{a_2^\alpha}}{M_2}+\cdots+\frac{\frac{\lambda}{a_n^\alpha}}{M_n})\\
&\ge \frac{n\cdot\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)^\alpha}}{\sqrt[n]{M_1M_2\cdots M_n}}+\frac{\frac{n\lambda}{\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)^\alpha}}}{\sqrt[n]{M_1M_2\cdots M_n}}\\
&= \frac{n[\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)^\alpha}+\frac{\lambda}{\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)^\alpha}}]}{\sqrt[n]{M_1M_2\cdots M_n}}\ ,
\end{aligned}$$

即 $n\ \ge\ \dfrac{n[\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)^\alpha}+\frac{\lambda}{\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)^\alpha}}]}{\sqrt[n]{M_1M_2\cdots M_n}}$ 。整理得

$M_1M_2\cdots M_n\ \ \ge\ \ [\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)^\alpha}+\dfrac{\lambda}{\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)^\alpha}}]^n$ ，即

$$(a_1^\alpha+\frac{\lambda}{a_1^\alpha})(a_2^\alpha+\frac{\lambda}{a_2^\alpha})\cdots(a_n^\alpha+\frac{\lambda}{a_n^\alpha})\ge[\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)^\alpha}+\frac{\lambda}{\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)^\alpha}}]^n\text{。}$$

因此，要證明 $(a_1^\alpha+\frac{\lambda}{a_1^\alpha})(a_2^\alpha+\frac{\lambda}{a_2^\alpha})\cdots(a_n^\alpha+\frac{\lambda}{a_n^\alpha})\ge[(\frac{S}{n})^\alpha+\lambda(\frac{n}{S})^\alpha]^n$ 成立，只需要證明 $[\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)^\alpha}+\frac{\lambda}{\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)^\alpha}}]^n\ge[(\frac{S}{n})^\alpha+\lambda(\frac{n}{S})^\alpha]^n$ 成立，即證明

$$\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)^\alpha}+\frac{\lambda}{\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)^\alpha}}\ge(\frac{S}{n})^\alpha+\lambda(\frac{n}{S})^\alpha$$

$$\Leftrightarrow\ [(\frac{S}{n})^\alpha-\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)^\alpha}][(\lambda(\frac{n}{S})^\alpha-\sqrt[n]{(a_1a_2\cdots a_n)^\alpha}]\ge 0\text{。}$$

由於 $(\frac{S}{n})^\alpha=(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n})^\alpha\ge(\frac{n\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}{n})^\alpha=\sqrt[n]{(a_1a_3\cdots a_n)^\alpha}$；並且因為 $\lambda\ge(\frac{S}{n})^{2\alpha}$，所以 $\lambda(\frac{n}{S})^\alpha\ge(\frac{S}{n})^{2\alpha}\cdot(\frac{n}{S})^\alpha=(\frac{S}{n})^\alpha$，故上式成立。從而 $(a_1^\alpha+\frac{\lambda}{a_1^\alpha})(a_2^\alpha+\frac{\lambda}{a_2^\alpha})\cdots(a_n^\alpha+\frac{\lambda}{a_n^\alpha})\ge[(\frac{S}{n})^\alpha+\lambda(\frac{n}{S})^\alpha]^n$ 獲證。證畢。

首作者電郵：qinqingxiong@163.com