一道 IMO 預選題與凸多邊形的一個性質

張贇
陝西省西安市第一中學

題目（第 42 屆 IMO 預選題第 4 題）設 M 為 $\triangle ABC$ 內一點，$MA_1 \perp BC$，垂足為 A_1，同樣在 CA 和 AB 上定義 B_1 和 C_1，設 $P(M) = \dfrac{MA_1 \cdot MB_1 \cdot MC_1}{MA \cdot MB \cdot MC}$，試確定 M 的位置，使得 $P(M)$有最大值，若 $\mu(ABC)$ 表示這個最大值，問使得 $\mu(ABC)$ 有最大值的三角形滿足什麼條件？

筆者經研究發現，不僅在 $\triangle ABC$ 中有 $P(M) \le \dfrac{1}{8}$，即 $\mu(ABC) = \dfrac{1}{8}$，當且僅當 $\triangle ABC$ 為等邊三角形時，有 $\mu(ABC) = \dfrac{1}{8}$。而且此結論可推廣為

定理　在凸 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$（$n \ge 3$）中，記 M 為其內一點，MB_1，MB_2，$\cdots$，MB_n 分別垂直 A_1A_2，A_2A_3，$\cdots$，A_nA_1，垂足依次為 B_1，B_2，$\cdots$，B_n，則有

$$P(M) = \frac{MB_1 \cdot MB_2 \cdot \cdots \cdot MB_n}{MA_1 \cdot MA_2 \cdot \cdots \cdot MA_n} \le \left[\sin\frac{(n-2)\times 90^\circ}{n}\right]^n$$

當且僅當 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 為正 n 邊形時取等號。

證明　記 $\angle MA_1A_2 = \alpha_1$，$\angle MA_2A_3 = \alpha_2$，$\cdots$，$\angle MA_nA_1 = \alpha_n$，則

$$P(M) = \frac{MB_1 \cdot MB_2 \cdot \cdots \cdot MB_n}{MA_1 \cdot MA_2 \cdot \cdots \cdot MA_n} = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cdots \sin\alpha_n,$$

另一方面，

$$P(M) = \frac{MB_1 \cdot MB_2 \cdots MB_n}{MA_1 \cdot MA_2 \cdots MA_n}$$

$$= \frac{MB_1}{MA_2} \cdot \frac{MB_2}{MA_3} \cdot \cdots \cdot \frac{MB_{n-1}}{MA_n} \cdot \frac{MB_n}{MA_1}$$

$$= \sin(A_2-\alpha_2)\sin(A_3-\alpha_3)\cdots\sin(A_n-\alpha_n)\sin(A_1-\alpha_1)$$

$\therefore P^2(M)$

$$= [\sin\alpha_1\sin(A_1-\alpha_1)]\cdot[\sin\alpha_2\sin(A_2-\alpha_2)]\cdot\cdots\cdot[\sin\alpha_n\sin(A_n-\alpha_n)]$$

$$\le \left[\frac{\sin\alpha_1+\sin(A_1-\alpha_1)}{2}\right]^2\cdot\left[\frac{\sin\alpha_2+\sin(A_2-\alpha_2)}{2}\right]^2\cdots\cdots\left[\frac{\sin\alpha_n+\sin(A_n-\alpha_n)}{2}\right]^2$$

$\because$ $y=\sin x$ 當 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 時是上凸函數，且 $0<\alpha_1,\ A_1-\alpha_1,\ \alpha_2,\ A_2-\alpha_2,\ \cdots$
$\alpha_n,\ A_n-\alpha_n<\frac{\pi}{2}$ ，

$$\therefore\quad \frac{\sin\alpha_1+\sin(A_1-\alpha_1)}{2}\le\sin\frac{\alpha_1+A_1-\alpha_1}{2}=\sin\frac{A_1}{2};$$

$$\frac{\sin\alpha_2+\sin(A_2-\alpha_2)}{2}\le\sin\frac{\alpha_2+A_2-\alpha_2}{2}=\sin\frac{A_2}{2};$$

$$\vdots$$

$$\frac{\sin\alpha_n+\sin(A_n-\alpha_n)}{2}\le\sin\frac{\alpha_n+A_n-\alpha_n}{2}=\sin\frac{A_n}{2};$$

$$\therefore\left[\frac{\sin\alpha_1+\sin(A_1-\alpha_1)}{2}\right]^2\cdot\left[\frac{\sin\alpha_2+\sin(A_2-\alpha_2)}{2}\right]^2\cdots\cdots\left[\frac{\sin\alpha_n+\sin(A_n-\alpha_n)}{2}\right]^2$$

$$\le\left(\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{A_2}{2}\cdots\sin\frac{A_n}{2}\right)^2$$

$$\therefore\quad P(M)\le\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{A_2}{2}\cdots\sin\frac{A_n}{2}$$

$$\le\left(\frac{\sin\frac{A_1}{2}+\sin+\frac{A_2}{2}+\cdots+\sin\frac{A_n}{2}}{2}\right)^n$$

$$\le\left(\sin\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{2n}\right)^n$$

$\because \quad A_1 + A_2 + \cdots + A_n = (n-2)\cdot 180^\circ$，

$\therefore \quad \left(\sin\frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{2n}\right)^n = \left[\sin\frac{(n-2)\cdot 90^\circ}{n}\right]^n$，

即 $P(M) \le \left[\sin\frac{(n-2)\cdot 90^\circ}{n}\right]^n$

當且僅當 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$，即 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 為正 n 邊形時取等號。

作者電郵：zhangyun196205@sina.com