以 GeoGebra 探究圓面積公式 —— 一次無心插柳的「數學化」教學設計

柯志明

圓面積「近似」還是「等於」 πr^2 ？

筆者小時候是在小學六年級學習圓面積公式的，現在的學生一般要在中學二年級才學習這條公式了。關於圓面積在課程綱要內有兩個學習重點，分別是「探究圓形面積的公式」和「計算圓形的圓周和面積」（課程發展議會，1999，21 頁）。不論從前的小學教科書還是現今的中學教科書，在引入圓面積公式前一般都會安排以下這個活動：將一個圓形分成若干等份（例如 16 等份，見圖一），然後把它們如圖二般重新組合成一個近似於平行四邊形的圖形。接著將這個「平行四邊形」的高和底的「近似值」分別表示為 r 和 πr（r 為圓的半徑），從而得出圖二的面積的近似值是 $\pi r \times r = \pi r^2$。最後，教科書就說圓面積等於 πr^2 了。

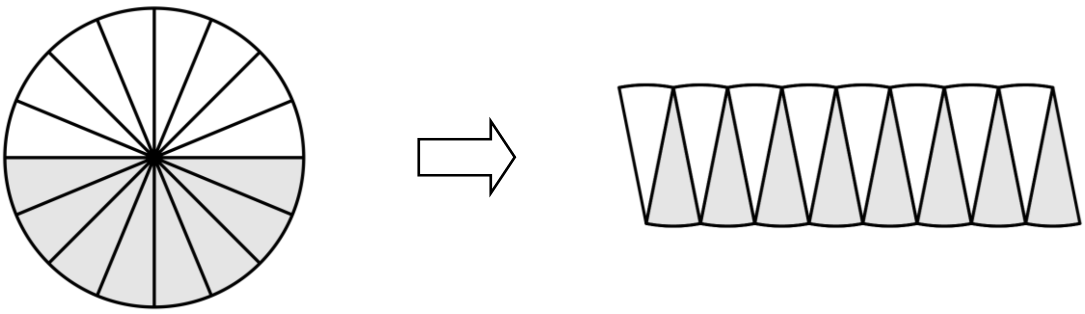


圖　一　　　　　　　　圖　二

對於以上的論述，筆者清楚記得自己小時候得到的印象是：我們其實是無法計算圓面積的，惟有將圓形拼砌成一個近似於平行四邊形的圖形，然後以它的「近似」面積（因為它的底和高也是近似值） πr^2 當作圓面積，讓我們學生有數可計而已。直到幾年後筆者接觸了微積分，才知道 πr^2 並非圓面積的近似值，並領略以極限思想得出面積的精妙所在。

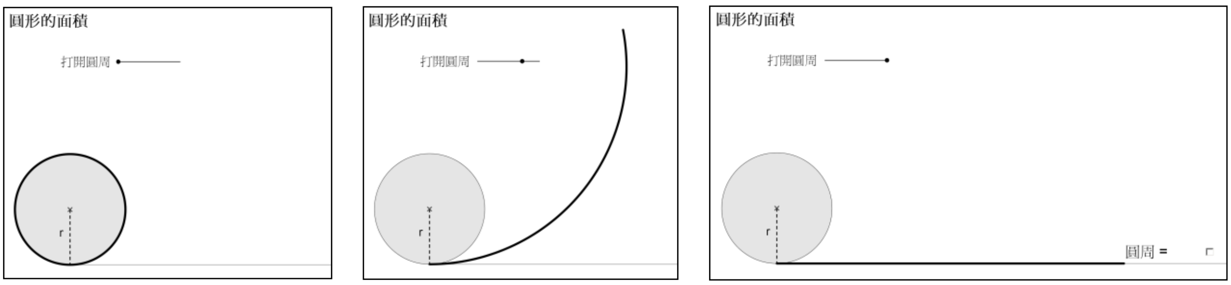
其實這個「傳統」的探究圓面積活動是很有數學味道的，只是因為實物的限制，我們很難將圓形繼續細分下去；加上論述的粗疏，以致令人不知道得出的結果是近似還是精確。筆者於是想：何不借助資訊科技打破這個限制？本文介紹一個筆者以 GeoGebra 設計的教學課業，讓學生利用電腦

對圓形進行分割、拼砌及增加分割份數等探究活動，得出圓面積是極限值 πr^2 的結論。

課業簡介

這個課業包括一個以 GeoGebra 設計的動態幾何檔 “circle-area.html”，並配合工作紙進行。GeoGebra 是一個以 Java 開發的動態幾何（Dynamic Geometry）免費軟件（freeware），只要電腦安裝了 Java，即使沒有安裝 GeoGebra 也可執行檔案。有興趣的讀者可到教育局的網上學與教支援網址 http://wlts.edb.hkedcity.net，依次點擊「數學」、「第三學習階段（中一至中三）」、「度量、圖形與空間範疇」、「面積和體積的簡單概念」、「KS3-MS2-1 運用圓周和圓形面積的公式」下載，亦可於網上學與教支援的教城網誌 http://edblog.hkedcity.net/math-wlts/2010/02/04 瀏覽簡介短片、操作動態檔案及下載所有動態檔案、教學建議及工作紙。

開啟檔案 “circle-area.html” 後，可見到一半徑為 r 的圓形（圖三(a)）。由於學生已在小學學過圓周的公式，而圓周公式和圓面積公式也關係密切，筆者設計了一個拖拉滑桿，將圓形的圓周打開及拉直（圖三(b)及(c)），讓學生先重溫圓周 $= 2\pi r$ 的公式。



(a) (b) (c)

圖　三

接著點選「分割圓形」鈕，顯示圖四(a)。圖中的圓形被分成 12 等份。拖拉於「重新排列」滑桿上的綠點，將紅色及藍色的兩個部分重新排列，如圖四(b) 至圖四(e) 所示。

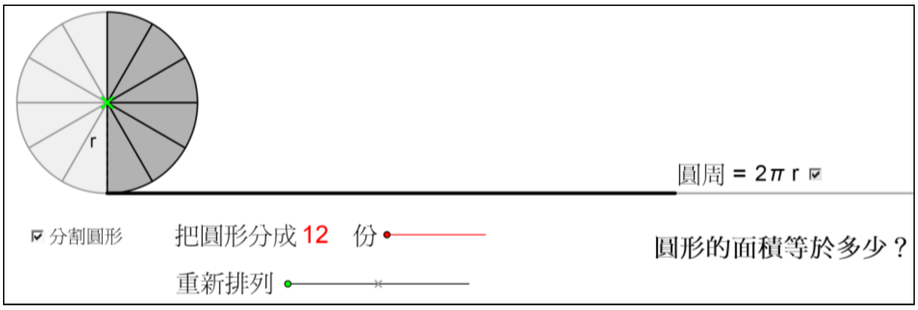


圖　四　(a)

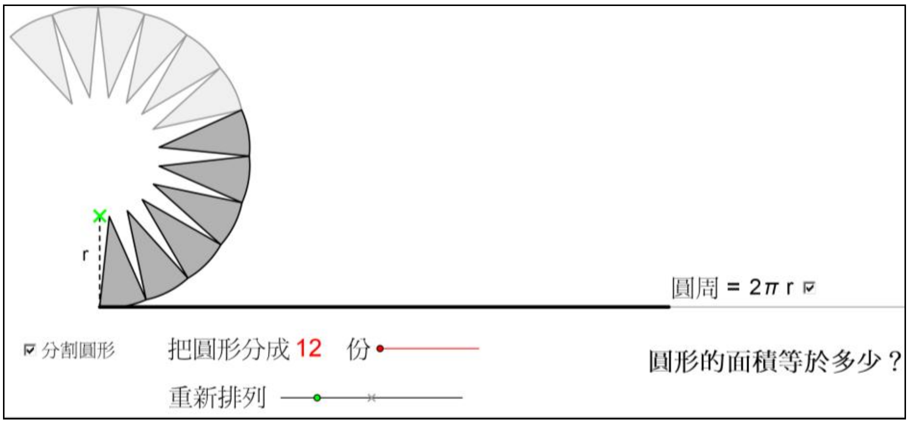


圖　四　(b)

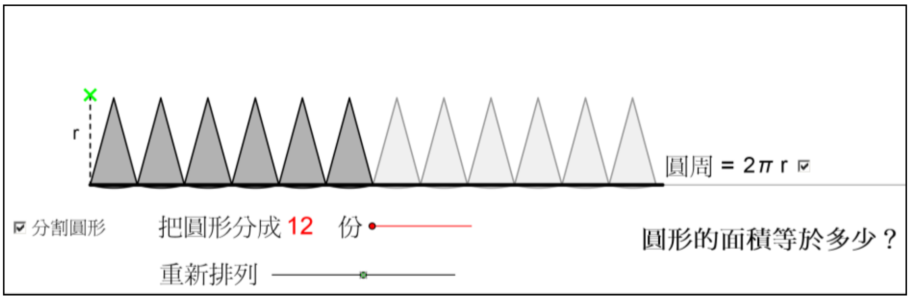


圖　四　(c)

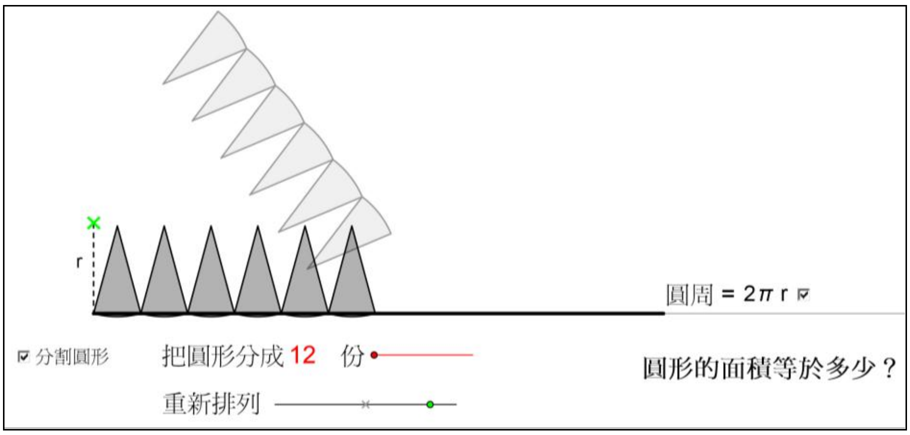


圖　四　(d)

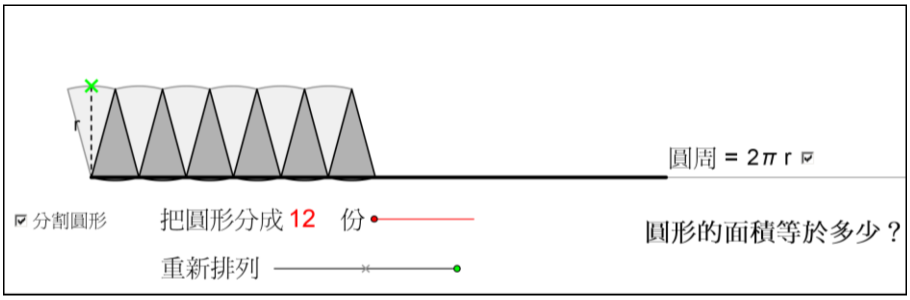


圖　四　(e)

老師可先問學生覺得圖四(e) 的圖形近似一個什麼形狀。然後老師再慢慢地拖拉紅色滑桿上的紅點，分別把圓形的分割份數增加至 50 份（圖五(a)）、100 份（圖五(b)）及 200 份（圖五(c)），讓學生觀察重新排列後的圖形的變化。

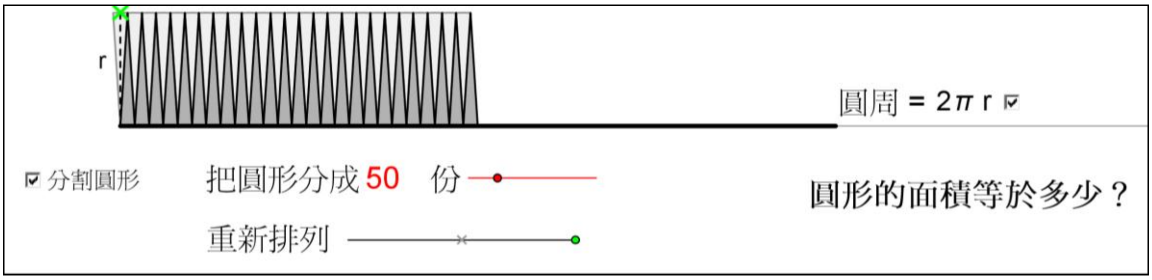


圖　五　(a)

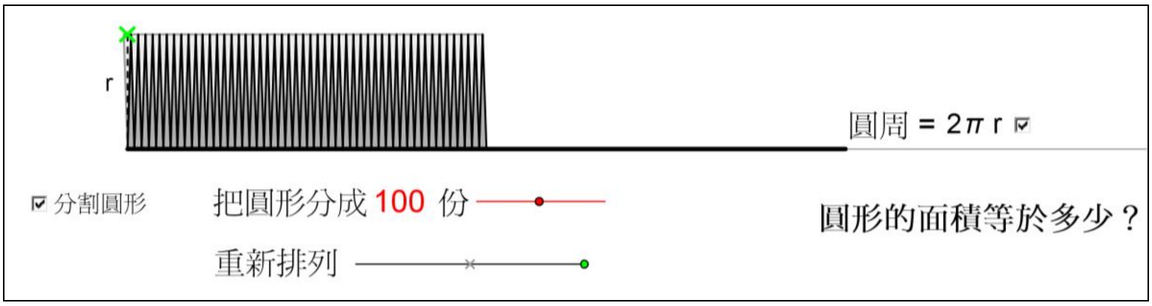


圖　五　(b)

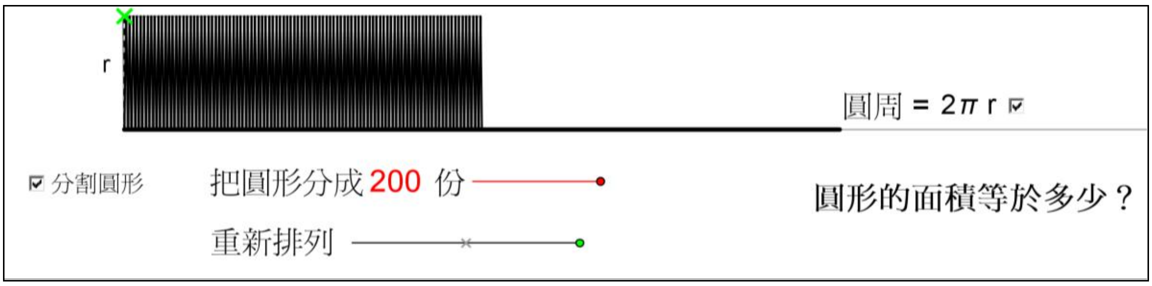


圖　五　(c)

接著老師問學生一條關鍵的問題：

「當分割的份數越來越多，重新排列後的圖形會越來越接近一個什麼圖形？」

經過檔案的動態呈現後，學生應能得出分割份數越大，所得的圖形會越接近一個長方形的結論，從而知道圓面積應等於這個極限長方形的面積。

這個長方形的闊為圓的半徑 r。若要幫助學生找出長方形的長，老師可將圖形還原成圓形（圖六(a)），然後再展開到到圖六(b) 的位置，讓學生認識長方形的長是圓周 $2\pi r$ 的一半，所以它的面積，也就是圓的面積，就是 $\pi r \times r = \pi r^2$ 了。

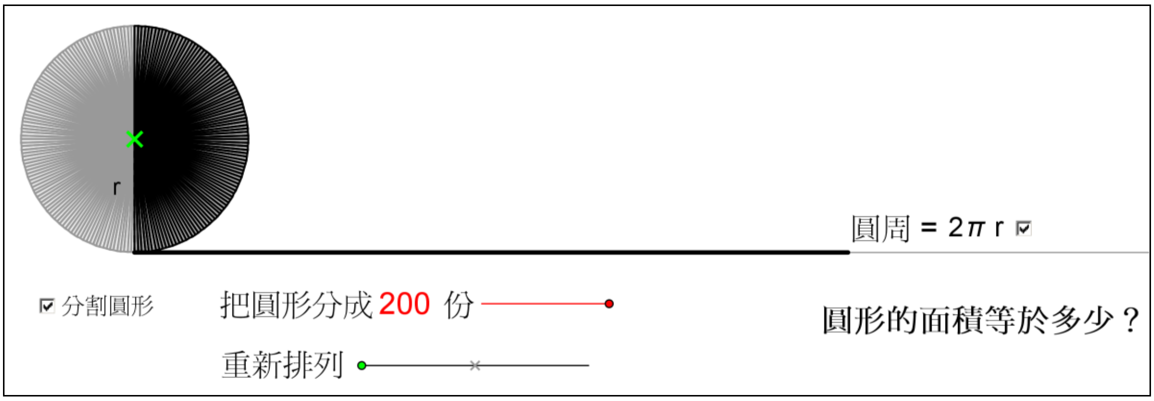


圖　六　(a)

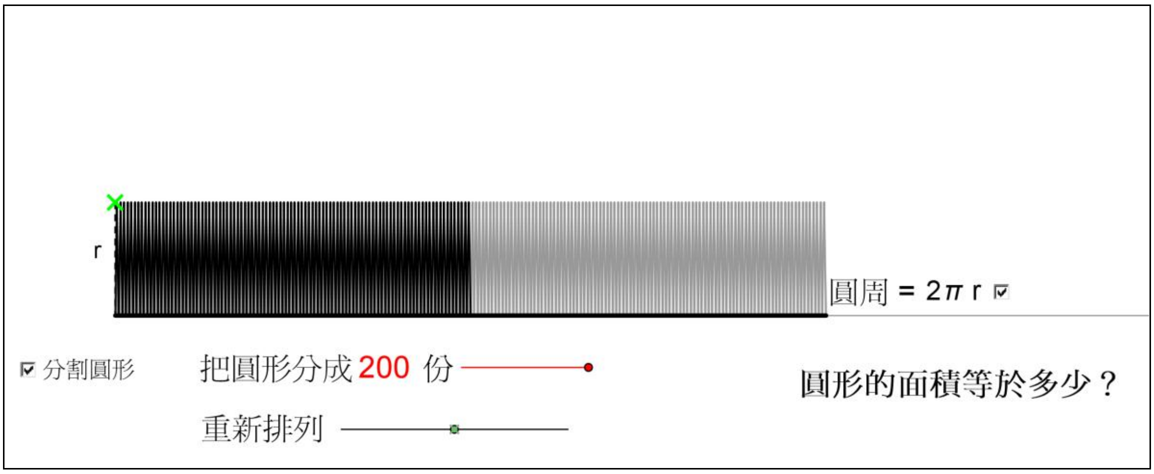


圖　六　(b)

設計的數學

這個課業的設計涉及不少數學技巧。筆者於本節和大家分享一下這些數學技巧及相關的 GeoGebra 指令，供有興趣的讀者參考。對這些技術細節

沒有興趣的讀者可略過本節。

構思課業時，筆者先思考如何指示電腦把圓的各個扇形如圖四(b) 般平均地展開。考慮一個圓內接正 $2n$ 邊形的各個頂點，設扇形的圓心角為 θ（$= \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$），由多邊形的外角和定理我們可得出圖七(a)。圖七(a) 的多邊形頂點序列（命名為 list1）以下列的 GeoGebra 指令構作：

list1 = Sequence[(sin(j θ), 1 - cos(j θ)), j, 0, 2 n]

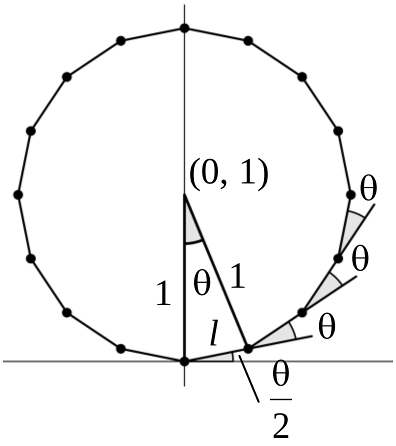


圖　七　(a)

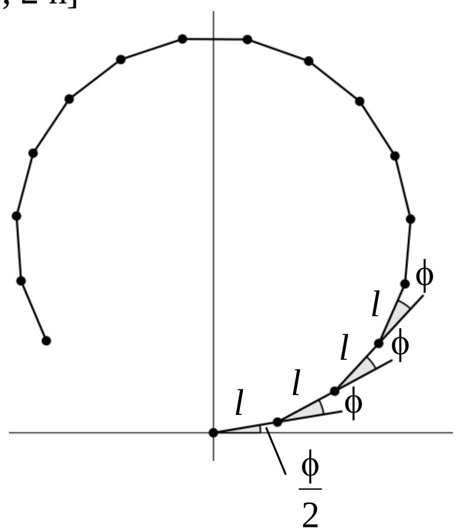


圖　七　(b)

筆者想像當圖七(a)的各個外角慢慢地減至 0 時，多邊形的周界就可以逐漸地展開成一直線了。於是筆者引入一變數 k，它的值（0 至 1）由滑桿「重新排列」的左邊部份控制，然後設 $\phi = (1 - k)\,\theta$，當 k 由 0 增加至 1 時，ϕ 的值由 θ 減至 0，而多邊形的周界也就如圖七(b)般展開成一直線了。圖七(b) 的多邊形的第 j 個頂點 (x_j, y_j) $(j = 0, 1, 2, \ldots, 2n)$ 可由下式得出：

$$
\begin{aligned}
x_j &= l\left(\cos\frac{\phi}{2} + \cos\left(\phi + \frac{\phi}{2}\right) + \cos\left(2\phi + \frac{\phi}{2}\right) + \ldots + \cos\left((j-1)\phi + \frac{\phi}{2}\right)\right) \\
&= l\left(\cos\frac{\phi}{2} + \cos\frac{3\phi}{2} + \cos\frac{5\phi}{2} + \ldots + \cos\frac{(2j-1)\phi}{2}\right) \\
y_j &= l\left(\sin\frac{\phi}{2} + \sin\left(\phi + \frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(2\phi + \frac{\phi}{2}\right) + \ldots + \sin\left((j-1)\phi + \frac{\phi}{2}\right)\right) \\
&= l\left(\sin\frac{\phi}{2} + \sin\frac{3\phi}{2} + \sin\frac{5\phi}{2} + \ldots + \sin\frac{(2j-1)\phi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

其中 $l = 2\sin\frac{\theta}{2}$ 為多邊形的邊長。我們看到頂點的坐標是三角級數的和。雖然 GeoGebra 提供的 SUM 指令可幫助我們計算級數的和，但當 n 的值較

大的時候會令電腦的負荷大增。為了令電腦運作更暢順，筆者利用複數的技巧先把三角級數的和求出。（大哉複數！）

$$
\begin{aligned}
x_j + i\,y_j &= l\left(\operatorname{cis}\frac{\phi}{2} + \operatorname{cis}\frac{3\phi}{2} + \operatorname{cis}\frac{5\phi}{2} + \ldots + \operatorname{cis}\frac{(2j-1)\phi}{2}\right)\\
&= l\left(e^{i\frac{\phi}{2}} + e^{i\frac{3\phi}{2}} + e^{i\frac{5\phi}{2}} + \ldots + e^{i\frac{(2j-1)\phi}{2}}\right)\\
&= l\,\frac{e^{i\frac{\phi}{2}}\left(e^{j\cdot i\phi}-1\right)}{e^{i\phi}-1}\\
&= l\,\frac{\left(\cos\frac{\phi}{2}+i\sin\frac{\phi}{2}\right)\left(\cos j\phi + i\sin j\phi - 1\right)}{\cos\phi + i\sin\phi - 1}\\
&= l\,\frac{\left(\cos\frac{\phi}{2}+i\sin\frac{\phi}{2}\right)\left(-2\sin^2\frac{j\phi}{2} + 2i\sin\frac{j\phi}{2}\cos\frac{j\phi}{2}\right)}{-2\sin^2\frac{\phi}{2} + 2i\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}}\\
&= l\,\frac{\cancel{\left(\cos\frac{\phi}{2}+i\sin\frac{\phi}{2}\right)}\cdot \cancel{2i}\sin\frac{j\phi}{2}\left(\cos\frac{j\phi}{2}+i\sin\frac{j\phi}{2}\right)}{\cancel{2i}\sin\frac{\phi}{2}\cancel{\left(\cos\frac{\phi}{2}+i\sin\frac{\phi}{2}\right)}}\\
&= l\left(\frac{\sin\frac{j\phi}{2}\cos\frac{j\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}} + i\,\frac{\sin\frac{j\phi}{2}\sin\frac{j\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\quad x_j = l\,\frac{\sin\frac{j\phi}{2}\cos\frac{j\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}\ ;\quad y_j = l\,\frac{\sin\frac{j\phi}{2}\sin\frac{j\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}
$$

基於以上結果，筆者以下列指令構作圖七(b) 的頂點序列（命名為 list2）：

list2 = Sequence[If[k < 1, (*l* sin(j ϕ/2) cos(j ϕ/2) / sin(ϕ/2), *l* sin(j ϕ/2) sin(j ϕ/2) / sin(ϕ/2)), (*l* j, 0)], j, 0, 2 n]

由於當 $k = 1$，$\phi = 0$，頂點坐標 $\left(l\,\frac{\sin\frac{j\phi}{2}\cos\frac{j\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}},\ l\,\frac{\sin\frac{j\phi}{2}\sin\frac{j\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}\right)$ 會變得沒有定義，所以要在 SEQUENCE 指令裡加上一個 IF 指令，指示電腦當 $k = 1$ 時將頂點構作為 $(j\,l, 0)$（$0 \le j \le 2n$，這時所有頂點位於 x 軸之上）。

有了頂點序列後，我們就可以構作扇形了。筆者將未展開的圓內接多邊形的扇形如圖八般平移到展開的周界的對應頂點，然後再作出適當的旋轉。筆者以下列指令先構作第一半的扇形序列（list3）：

list3 = Sequence[Rotate[Translate[CircularSector[(0, 1), Element[list1, j], Element[list1, j+1]], vector[Element[list1, j], Element[list2, j]]], -(2j-1) k θ/2, Element[list2, j]], j, 1, n]

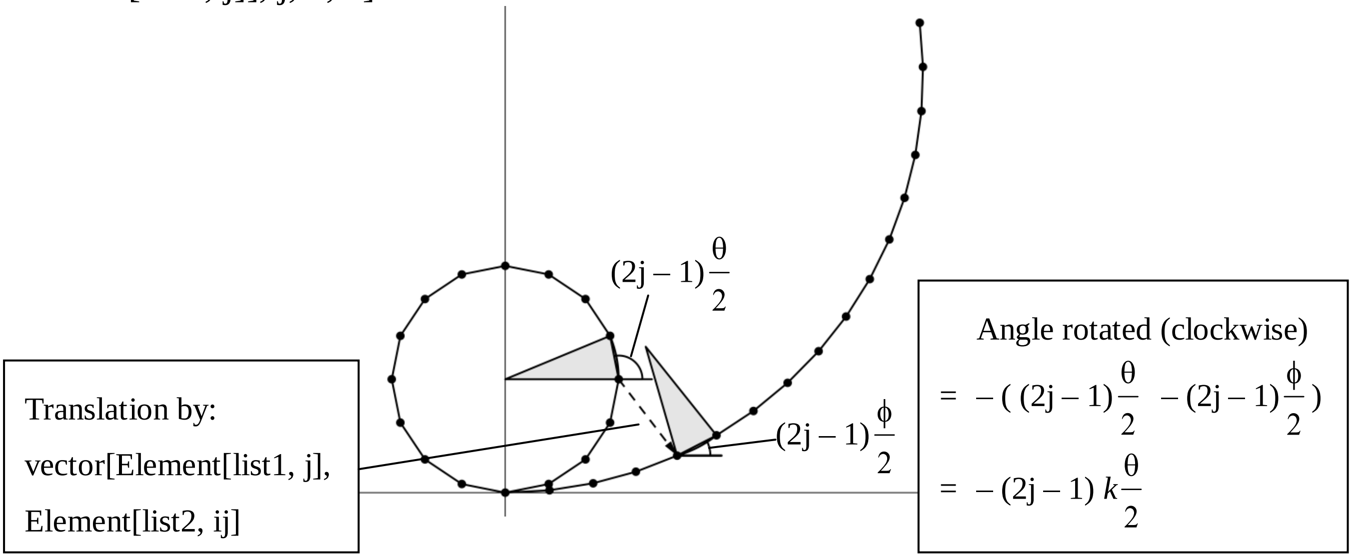


圖　八

對於另一半的扇形序列（圖九的淺色部份），由於需要在扇形排成一直線後以 P 點為中心作 180° 的旋轉，筆者引入了另一個變數 k'，它由滑桿「重新排列」的右邊部份控制，當 k 介乎 0 至 1 的時候 k' 的值是 0；當 $k = 1$ 之後，k' 的值就由 0 增至 1。這序列的扇形 (list4) 以下列指令構作：

list4 = Sequence[Rotate[Rotate[Translate[CircularSector[(0, 1), Element[list1, j], Element[list1, j+1]], vector[Element[list1, j], Element[list2, j]]], -(2j-1) k θ/2, Element[list2, j]], 180° k', (n l - sin(θ/2)/2, cos(θ/2)/2)], j, n+1, 2n]

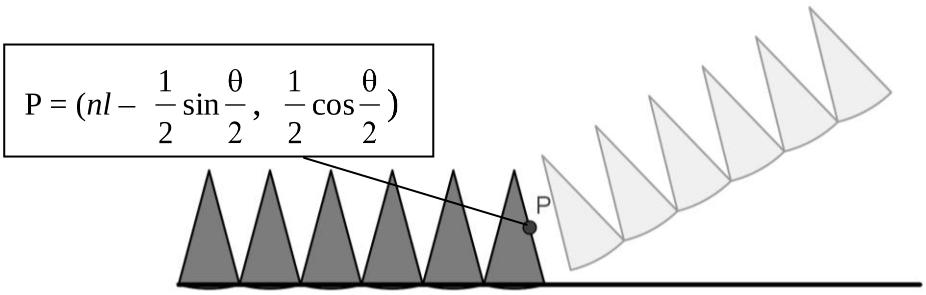


圖　九

解決了把扇形展開及重排（旋轉）的問題後，筆者就思考是否可以把圓周以類似方法打開成一直線（圖三(a)至(c)）。先考慮把圓周打開到某個位置時圓周的端點 L，它是圖七(b) 的最後一點（$j = 2n$）當 n 趨向無限大時的極限值，所以

$$L = \left(\lim_{n\to\infty} l\frac{\sin\frac{2n\phi}{2}\cos\frac{2n\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}},\ \lim_{n\to\infty} l\frac{\sin\frac{2n\phi}{2}\sin\frac{2n\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}\right)$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} 2\sin\frac{\pi}{2n}\,\frac{\sin(1-k)\pi\cdot\cos(1-k)\pi}{\sin\frac{(1-k)\pi}{2n}},\ \lim_{n\to\infty} 2\sin\frac{\pi}{2n}\,\frac{\sin(1-k)\pi\cdot\cos(1-k)\pi}{\sin\frac{(1-k)\pi}{2n}}\right)$$

$$= \left(2\sin(1-k)\pi\cdot\cos(1-k)\pi\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{(1-k)\pi}{2n}},\ 2\sin(1-k)\pi\cdot\cos(1-k)\pi\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{(1-k)\pi}{2n}}\right)$$

由 L'Hospital 法則，我們有 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{(1-k)\pi}{2n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2n}}{\lim_{n\to\infty}\frac{(1-k)\pi}{2}\cos\frac{(1-k)\pi}{2n}} = \frac{1}{1-k}$ ，

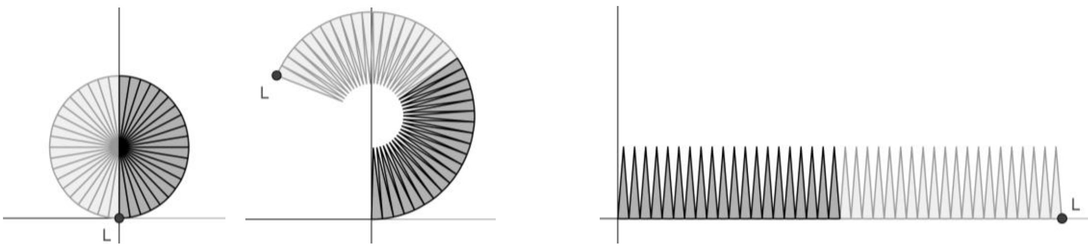
$$\therefore\quad L = \left(\frac{2\sin(1-k)\pi\cdot\cos(1-k)\pi}{1-k},\ \frac{2\sin(1-k)\pi\cdot\sin(1-k)\pi}{1-k}\right)$$

$$= \left(\frac{\sin 2(1-k)\pi}{1-k},\ \frac{1-\cos 2(1-k)\pi}{1-k}\right)$$

由於希望 L 和扇形可以分別打開，筆者引入另一個變數 m ($0 \le m \le 1$，以「打開圓周」滑桿控制) 用來控制 L 的位置，所以 L 的坐標是 $\left(\frac{\sin 2(1-m)\pi}{1-m}, \frac{1-\cos 2(1-m)\pi}{1-m}\right)$，構作的指令為：

L = (sin(2 π (1 - m)) / (1 - m), (1 - cos(2 π (1 - m))) / (1 - m))

圓周打開時是一條怎樣的曲線？筆者細仔觀察扇形展開時的形態（圖十(a)至(c)），得出一個猜想：圓周打開時是應該一條弧（Arc），初始時它是一個半徑為 1、圓心為 (0 , 1) 的圓（圖十(a)）；到最後成一直線時它是一條半徑為無限大的弧（圖十(c)）。



(a) (b) (c)

圖 十

由於 $m=0$ 時弧的半徑是 1，$m=1$ 時弧的半徑是無限大，筆者猜測弧的半徑可能為 $\dfrac{1}{1-m}$。筆者再觀察 L 的坐標 $\left(\dfrac{\sin 2(1-m)\pi}{1-m}, \dfrac{1-\cos 2(1-m)\pi}{1-m}\right)$，突然發覺這正是一個半徑為 $\dfrac{1}{1-m}$、圓心為 $\left(0, \dfrac{1}{1-m}\right)$ 及弧長為 2π 的弧的端點（圖十一）！於是真相大白：打開的圓周是一條圓心為 $\left(0, \dfrac{1}{1-m}\right)$、半徑為 $\dfrac{1}{1-m}$ 的弧，它的起點是 $(0, 0)$，端點是 L。於是筆者以下列指令構作打開的圓周 s：

s = CircularArc[(0, 1 / (1 - m)), (0,0), L]

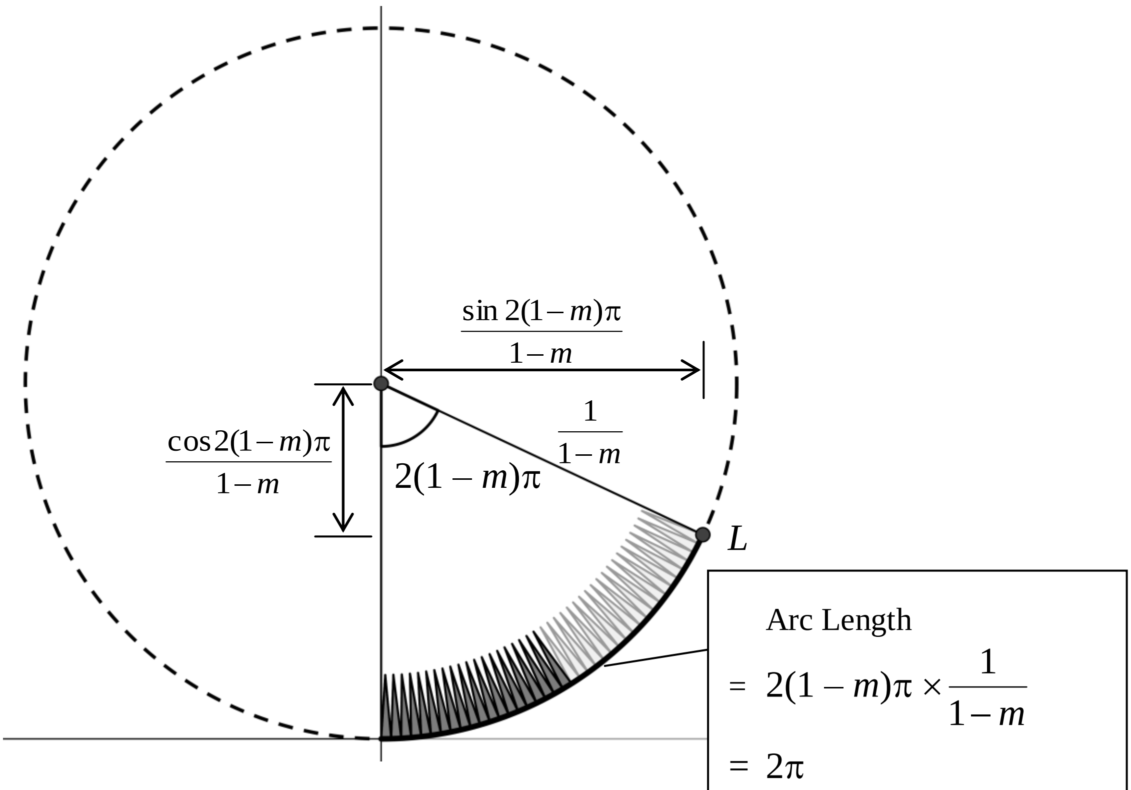


圖 十 一

當 $m = 1$ 時，s 未能定義，此時圓弧會消失。由於 $m = 1$ 時圓周已拉直，我們可以令電腦顯示線段 Segment[(0 , 0), (2 pi , 0)]，代替消失了的弧。致此，我們完成了課業設計的關鍵部份。

一次無心插柳的「數學化」教學設計

當筆者重新檢視這個課業，發覺和 Freudenthal 以「數學化」(Mathematising)（Freudenthal, 1968, 1991）觀點組織教學活動的主張不謀而合。透過資訊科技（GeoGebra）將圓形分割及重組，再不斷地增加分割份數及觀察重組圖形的動態變化，學生經歷了由粗疏（近似於一個平行四邊形的面積）到精密（等於極限長方形的面積）的圓面積探究過程，體驗一次圓面積公式的再創造（re-invention）之旅。筆者非「數學化教學」專家，只是熱衷於應用動態幾何等資訊科技促進學與教，卻無心插柳地作了一次「數學化」的教學設計。

近年將資訊科技融入教育、電子教科書、電子學習（e–Learning）等議題又再受到關注。輿論普遍認同資訊科技有助學生學習，但對於資訊科技實際上如何促進學與教等卻不甚了了。其實資訊科技只是手段，如何善用各種資訊科技的特點，作出有效的教學設計才至關重要。動態幾何軟件的構作（construction）、拖引（dragging）、追蹤（tracing）及軌跡（locus）等功能，對呈現數學內容及其各種變化（variations）提供了無盡的可能性。若能適當地運用於教學設計，可帶給學生全新的實驗、探究、討論及再創造數學的機會，令我們的數學課更能帶動（engage）學生、更加精采、或更加「數學化」。這些目標當然不能一蹴而就，需要我們持之以恆地實踐和探討。

參考文獻

Freudenthal, H. (1968). Why to Teach Mathematics so as to Be Useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1, 3-8.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

課程發展議會（1999）。《中學課程綱要：數學科（中一至中五）》。香港：政府印務局。

作者電郵： orchiming@gmail.com