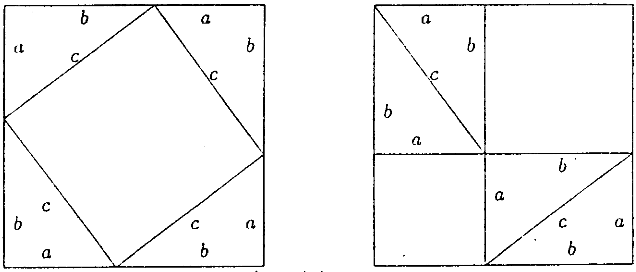
《九章算術》傳統的連續數勾股形構作

Paul Yiu
Department of Mathematics
Florida Atlantic University
Boca Raton, FL 33431

一. 引言

《九章算術》對於初等數學教學的價值是不容忽視的。中國古代的數學傳統就是奠基於這卷擬題有趣確實，造術精簡優美的習題集。[1] 就以卷末的《勾股章》而言，雖然現存版本的插圖都是後世注家們添補的，《九章》原本喻算於圖的事實卻是無可置疑的。例如最基本的勾股定理：直三角形(又稱勾股形[2])弦方等於勾股平方和：$a^2 + b^2 = c^2$, 其眞確性比較下列兩圖便一目了然：



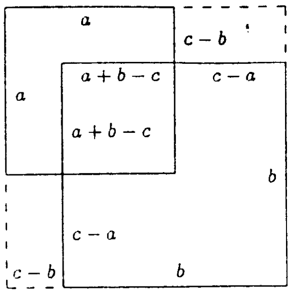
圖一

這種幾何式的代數 (geometric algebra) 不僅在初等數學教學上起著重要的啓發作用，就是對於習慣用等號代數機械性解題的人，偶然也帶來頓悟「此中有眞意」的樂趣。本文旨在介紹清季數學家劉彝程[3] 如何巧妙地按《勾股章》的傳統構作連續數勾股形(兩短邊相差1的整數直三角形)，並作補充和推廣。

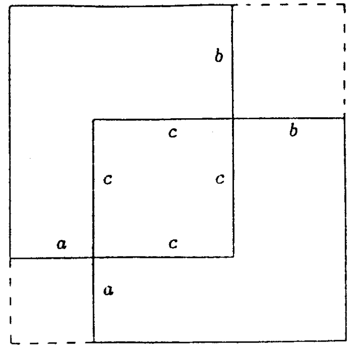
二. 整數勾股形的構作

整數勾股形的構作在教學和擬題的功用是明顯不過的。初學者都熟知 (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17) 等整數勾股形。劉徽給《勾股章》第十二題[4] 的註釋便揭示了一般整數勾股形的作法。圖二展示勾股形的弦方，其左上及右下兩端分別爲勾方和股方。按勾股定理，這兩正方形的面積和等於弦方。因此右上及左下兩端被遺漏的矩形 (邊長各爲 c - a 及 c - b) 面積和恰好等於重疊於中央(邊長爲 a + b - c) 的正方形面積。這就是恒等式(1)。同理，恒等式(2)可以按圖三得出。

(1) $$2(c - a)(c - b) = (a + b - c)^2$$
(2) $$2(c + a)(c + b) = (a + b + c)^2$$



圖二



圖三

《勾股章》第十二題就是按著恒等式(1)來求解已知勾弦差 c - a 和股弦差 c - b 的直三角形。若此爲已知，則按(1)式開方得弦和差：

$$a + b - c = \sqrt{2(c-a)(c-b)} 。$$

因此

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad & a = (a + b - c) + (c - b) = \sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c - b) \\
& b = (a + b - c) + (c - a) = \sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c - a) \\
& c = (a + b - c) + (c - a) + (c - b) \\
& \quad = \sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c - a) + (c - b)
\end{aligned}
$$

構作整數勾股形，可以取任意兩整數 p、q，令 $c - a = 2p^2$；$c - b = q^2$，即得 $a + b - c = 2pq$。從此得勾股形三整數邊

$$
\begin{aligned}
(4) \qquad & a = 2pq + q^2 \\
& b = 2p^2 + 2pq \\
& c = 2p^2 + 2pq + q^2
\end{aligned}
$$

若 p、q 互素，則整數勾股形三邊不帶公因子，稱作本原 (primitive) 勾股形。

三. 劉彝程的連續數勾股形構作

當然，按(4)式，連續數勾股形的構作歸結到求解不定方程 $2p^2 - q^2 = \pm 1$ 的問題上。[5] 劉彝程卻直接從恒等式(1)、(2)入手，給出一個迭代方法，按一勾股形 (a，b，c) 構作較大的勾股形 (a'，b'，c')，使得勾股差不變：b' - a' = b - a。其法乃是取 c' - a' = c + b，及 c' - b' = c + a。按(1)、(2)兩式，得知 a' + b' - c' = a + b + c，從而[6]

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad & a' = 2a + b + 2c \\
& b' = a + 2b + 2c \\
& c' = 2a + 2b + 3c
\end{aligned}
$$

劉氏從最小的整數勾股形 (3, 4, 5)開始，按(5)式迭代得連續數勾股形如下：

(6) (3, 4, 5), (20, 21, 29), (119, 120, 169), (696, 697, 985), ...

四. 劉氏構作的完備性

我們自然要問：這個迭代程序(5)是否給出所有連續數勾股形。劉氏似乎沒有討論這個問題。茲補述於此。容易察覺迭代(5)是可逆的：從一整數勾股形構作勾股差不變的較小整數勾股形。即是說

$$(7)\qquad \begin{aligned} a &= 2a' + b' - 2c' \\ b &= a' + 2b' - 2c' \\ c &= -2a' - 2b' + 3c' \end{aligned}$$

按三角不等式 $a' + b' > c'$ 容易得知 $c < c'$。因此 (a, b, c) 爲較小勾股形。然而這個反迭代程序 (7) 總不能從一整數勾股形永無休止地給出遞減的整數勾股形。關鍵在於最短邊 $a = 2a' + b' - 2c'$ 必須爲正整數。按勾股定理，容易從 $2a' + b' > 2c'$ 推得 $4a' > 3b'$，亦即 $a' > 3(b' - a')$。因此，按迭代 (7)，任何勾股差爲 d 的整數勾股形必還原到勾不大於 3d 的(極小)整數勾股形。對於連續數勾股形而言，$d = 1$。勾不大於 3 的(連續)整數勾股形恰好只有 (3, 4, 5) 一個。這就說明劉氏的構作 (5) 眞的給出了所有連續數勾股形。

五. 勾股差爲定數的整數勾股形

劉彝程的迭代 (5) 當然不拘限於連續數勾股形的構作。對於勾股差爲定數 $d > 1$ 之本原勾股形，按 (7) 必還原到最短邊小於 3d 的本原整數勾股形。(7) 今欲求勾股差小於 10 之本原整數勾股形。按 (4) 式知本原勾股形之勾股差必爲奇數，因此勾股差小於 10 之本原勾股形必還原到最短邊小於 27 之本原勾股形。按 (4) 式驗算此類整數勾股形只有下列四種：

p	q	(a, b, c)	|b - a|
1	1	(3, 4, 5)	1
2	1	(5, 12, 13)	7
1	2	(15, 8, 17)	7
2	3	(21, 20, 29)	1

按此可以推得下列結論：

(一) 不存在勾股差爲 3、5、9 的本原勾股形。(8)

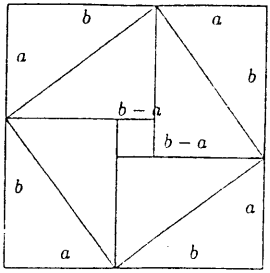
(二) 勾股差爲 7 的本原勾股形共有兩組，分別由(5, 12, 13),(8, 15, 17) 按 (5) 式迭代得出：

(5, 12, 13), (48, 55, 73), (297, 304, 425), ...
(8, 15, 17), (65, 72, 97), (396, 403, 565), ...

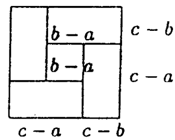
劉氏就是利用這個方法得出勾股差爲 7 的本原勾股形，並且巧妙地運用下列兩圖得出的恒等式 (8)、(9) 來求解不定方程 $2x^2 + 49 = z^2$.

(8) $$(a+b)^2 = 2c^2 - (b-a)^2$$

(9) $$(2c-a-b)^2 = (b-a)^2 + 2(a+b-c)^2$$



圖四

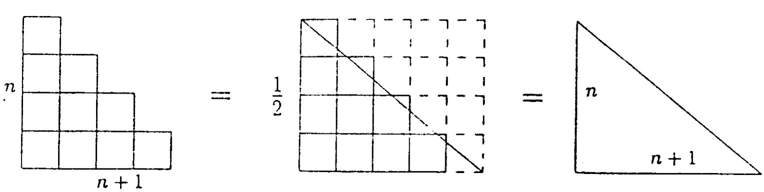


圖五

我們倣效劉氏的方法利用這兩則恒等式 (8), (9) 來求解兩道有趣的數論問題。

六. 三角形數等於平方數問題

三角形數 (triangular number) 是指形如 $1+2+3+\ldots+n$ 的連續整數和，此即 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ... 。今問除 1 和 36 外，是否尚有數值爲平方的三角形數。顯然第 n 個三角形數可以視爲短邊爲連續數 n, n + 1 的勾股形面積。(9)



圖六

若第 n 個三角形爲平方數 m^2， 按圖四， 令 $a = n$, $b = n + 1$ 得 $1 + 8m^2 = 1 + 2(2m)^2$ 爲平方數。比較恒等式 (9) 知存在一連續勾股形 (a, b, c) 使得 $2m = a + b - c$； $2n + 1 = 2c - a - b$。

即 $n = a - \frac{1}{2}(c-1)$； $m = c - b$。 今按 (6) 式的連續數勾股形得

$$(n, m) = (1, 1),\ (8, 6),\ (49, 35),\ (288, 204), \ldots$$

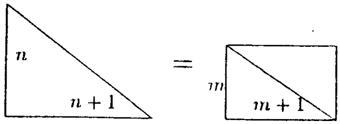
其餘可按

$$n' = 3n + 4m + 1$$
$$m' = 2n + 3m + 1$$

迭代而得。

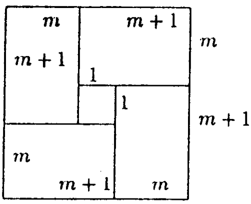
七. 三角形數爲另一三角形兩倍問題

設第 n 個三角形數爲第 m 個三角形數之兩倍。即

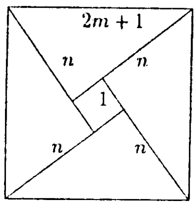


圖七

按圖八，邊長爲 2m + 1 之正方形可以重新陳列如圖九：



圖八



圖九

由是得知 (n, n + 1, 2m + 1) 爲連續數勾股形。比較 (6) 式得

$$(n, m) = (3, 2), (20, 14), (119, 84), (696, 492), \ldots$$

其餘可按

$$n' = 3n + 4m + 3$$
$$m' = 2n + 3m + 2$$

迭代而得。

八. 習題

1. 繪圖說明兩連續三角形數之和必爲平方數，並求四連續三角形數使其和亦爲平方數。

2. 甲街約有房屋三百間，張君住宅在甲街奇數門牌一側。其左鄰(自街頭起)門牌號數總和恰好等於其右俚 (迄街尾止) 門牌號數總和。問甲街共有房屋若干？張君門牌幾何？

3. 乙街約有房屋六百間，李君住宅在乙街偶數門牌一側。其左鄰(自街頭起)門牌號數總和恰好等於其右俚 (迄街尾止) 門牌號數總和。問乙街共有房屋若干？張君門牌幾何？

九. 習題 (不定方程 $1 + 3n^2 = m^2$)

1. 設有勾股形 (a. b. c)，試證恒等式
$$(c + b)(5c - 4a + 3b) = (2c - a + 2b)^2$$
繪圖証明最佳。

2. 設有勾股形 (a, b, c)，求作勾股形 (a', b', c')， 使
$$c' - a' = c + b \qquad 及 \quad c' + a' = 5c - 4a + 3b$$
証明 2a - c 之絕對值不變： $2a' - c' = -(2a - c)$

3. 從最小勾股形 (3, 4, 5) 開始，按前題構作所有 $2a - c = \pm 1$ 之整數勾股形。

4. 証明題 (1) 之恒等式可以改寫如下：
$$(2a - c)^2 + 3(a + 2b - 2c)^2 = (4c - 2a - 3b)^2$$

5. 利用題 (3) 之整數勾股形求解不定方程 $1 + 3n^2 = m^2$ 得
$$(n, m) = (1, 2), (4, 7), (15, 26), (56, 97), \ldots$$
試說明其迭代程序，並証明其完備性。

十. 習題 (三斜求積)

秦九韶《數書九章.卷五》有「三斜求積」題，設三角形邊長 13, 14, 15，求得面積 84。一般而言，三角形(不必爲勾股形)給定邊長 a, b, c, 其面積可按下列公式求得.[10]

$$面積 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2c^2 - (\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2})^2}$$

今欲求三邊長度爲連續整數，面積亦爲整數之三角形。

1. 設三邊長度爲 b - 1, b, b + 1。求証 b 必爲偶數。
2. 令 b = 2m。求証 $m^2 - 1$ 爲一平方數之三倍。
3. 按上節不定方程 $1 + 3n^2 = m^2$ 之通解得下列三邊爲連續數，面積爲整數之三角形

m	(b - 1, b, b + 1)	面積
2	(3, 4, 5)	**6**
7	(13, 14, 15)	**84**
26	(51, 52, 53)	**1170**

試說明其迭代程序，並証明其完備性。

註釋：

(1) 參孜白尙恕：《九章算術注釋》，科學出版社 1983，及吳文俊主編《九章算術與劉徽》，北師大出版社 1982。英文討論《勾股章》的專著有 F.J.Swetz, Was Pythagoras Chinese? An Examination of Right Triangle Theory in Ancient China. Penn. State Univ. Press, 1977, 及 LAM Lay-Yong & SHEN Kangsheng, Right-Angled Triangles in Ancient China, Arch. Hist. Exact Sciences, 30(1984)87-112.

(2) 直角兩鄰邊短者爲勾，長者爲股，分別記作 a, b。直角對邊爲弦，記作 c。勾股形 a, b 兩邊長短之分，不宜過份拘泥。譬如 (4) 式中 a, b 之相對長短，視乎 p, q 之選擇而異。

(3) 本文討論劉氏對連續數勾股形的構作，取材於錢寶琮《中國數學中之整數勾股形研究》收入《錢寶琮科學史論文選集》，科學出版社，1983，頁287-303。該文頁303展示 (3)式左邊應爲 a' + b' - c'。又按洪萬生：《同文館算學教習李善蘭》(收入楊翠華、黃一農主編：《近代中國科技史論集》，清華歷史所出版，1991)頁237：「劉彝程...曾任上海廣方言館算學敎習(1873)，後兼主持(上海)求志書院算學科(1875)。在1893年退休後，他將多年所出試題及解答編成《簡易庵算稿》(1899)，在數論的不定分析研究做出一點成績」。年來蒙洪教授惠贈中國數學史論文多篇，獲益良多，謹此鳴謝。

(4) 《勾股章》第十二題：今有戶不知高廣，竿不知長短。橫之不出四尺，從之不出二尺，邪之適出。問戶高廣袤各幾何？

(5) 西方學界對於此問題的研究，參考 L.E.Dickson, History of the Theory of Numbers, vol.II,(1920), Chelsea reprint, pp.181-184.

(6) (5)式的 a', b', c' 固可求解聯立方程而得，然亦得按圖二案出。將圖二之長度 a, b, c 改作 a', b', c', 則

$$\begin{aligned} a' &= (a' + b' - c') + (c' - b') \\ &= (a + b + c) + (c + a) \\ &= 2a + b + 2c \end{aligned}$$

同理得 b', c'。下面(7)式之 a, b, c 亦可按圖三讀出。

(7) 最短邊爲 3d，勾股差爲 d 之勾股形必爲 (3d, 4d, 5d)。 d>1 時此非本原勾股形。

(8) 不定方程 $2p^2 - q^2 = \pm 3, \pm 5, \pm 9$ 無解之事實，亦可按 2爲模 3(或模 5)之二次非剩餘 (quadratic nonresidue) 推導得之。

(9) 下面假設圖六右端之勾股形面積爲平方數，其弦長必不能爲整數，因爲費　爾瑪 (Pierre de Fermat, 1601-1665) 曾利用著名的無窮下降法 (method of infinite descent) 証明整數勾股形之面積必不能爲平方數，本文第四節的証明，就與此無窮下降法有相同旨趣。

(10) 從此面積公式亦可推得著名的海倫公式 (Heron formula)

$$面積 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

其中 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ 爲三角形之半周界。