圖形模式法的應用

傅海倫
山東師範大學數學科學學院

圖形模式法是指當解數學問題時，把題設條件元素間的關係或形式借用圖形的幾何關係來說明，或者將這種關係在某個幾何圖形上得以展示。圖形模式法能使問題按新的觀點、新的角度去審視，從而使問題巧妙地獲得解決，因而它是一種創造性的思維活動，其關鍵是要善於觀察、分析、聯想與構造。能否正確應用圖形模式法解決問題，往往取決於學生的認知結構與創造性思維能力。以下以 4 個例子說明。

例一　a、b 是正數。證明：存在這樣的三角形，它的三邊邊長分別等於 $\sqrt{a^2+b^2}$ 、$\sqrt{a^2+4b^2}$ 、$\sqrt{4a^2+b^2}$ ，並求出這個三角形的面積。

分析　本題的常規思路是用三條線段構成三角形的充要條件來證三角形的存在性，再用希羅公式或餘弦定理求出三角形的面積，但是注意到三邊長的資料，證明與求解都不是很容易的事。觀察 $\sqrt{a^2+b^2}$ 、$\sqrt{a^2+(2b)^2}$ 、$\sqrt{(2a)^2+b^2}$ 的結構特徵，聯想到畢氏定理，並進而運用圖形模式法，作出圖一。

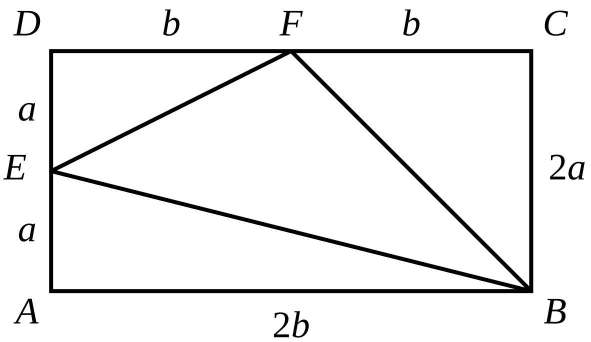

圖　一

矩形 $ABCD$ 鄰邊長 $2a$ 和 $2b$；E、F 分別是 AD、CD 的中點，則 ΔBEF 的三邊邊長恰為 $\sqrt{a^2+b^2}$ 、$\sqrt{a^2+(2b)^2}$ 、$\sqrt{(2a)^2+b^2}$ 。存在性得證。

$$\text{三角形面積 } S_{\Delta BEF} = 2a \times 2b - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}a \times 2b - \frac{1}{2}2a \times b$$
$$= \frac{3}{2}ab \text{。}$$

一方面，觀察三個根式的結構特徵能夠聯想到畢氏定理；另一方面，運用合適的模式構造出既符合題設條件又便於運算的圖形，於是整個證明便「豁然開朗」了。應當注意，圖形模式法是綜合思維過程的一種表現形式和結果，而並非對每一種幾何圖形的簡單拼接或組合都可以獲得成果。例如採用圖二的方法，並不能有效地解決問題。

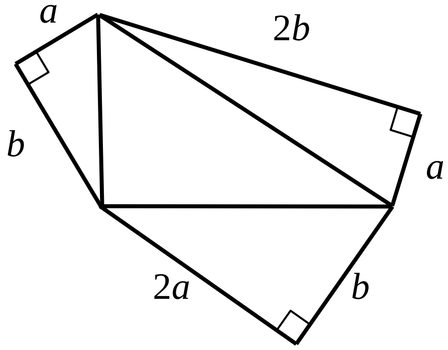

圖　二

例二　求和：$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$。

分析　通常解法是利用 $(K+1)^3 - K^3$，$K = 1, 2, \ldots, n$，裂項求和。若聯想 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ 的幾何意義是邊長分別為 $1, 2, \ldots, n$ 的正方形面積之和，則可以運用圖形模式法解此題。

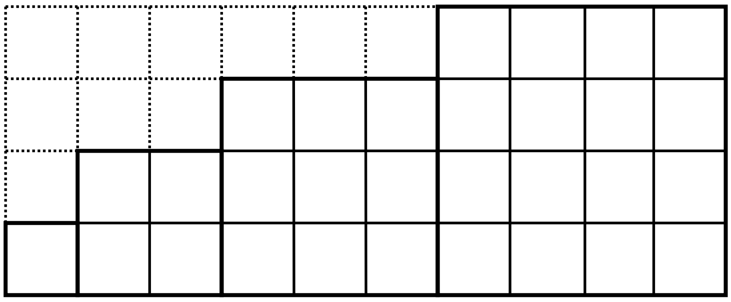

圖　三

如圖三，$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ 就是圖中小正方形面積之和，將它補成一個 $n \times (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$ 的矩形，比所求的面積增加了 $1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \ldots + (1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1))$。

而 $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) = \dfrac{(n-1)\times n}{2} = \dfrac{1}{2}(n^2 - n)$，

故 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

$$= n \times (1 + 2 + 3 + \ldots + n) - \frac{1}{2}[(2^2 - 2) + (3^2 - 3) + \ldots + (n^2 - n)]$$

$$= n \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2}[2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 - (2 + 3 + \ldots + n)]$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 - (1 + 2 + 3 + \ldots + n)]$$

設 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = x$，

則 $x = \dfrac{n^2(n+1)}{2} - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{n(n+1)}{2}$，

解得 $x = \dfrac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$。

以上兩例通過分析結構特徵，聯想運用圖形模式法，構造新形式來達到巧妙解題的目的。

例三 從 6 對老搭檔運動員中選派 5 名出國參賽，要求被選的運動員任意兩名都不是老搭檔，求有多少種不同的選派方法？

分析 如圖四，六稜柱 $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$，用 6 種不同的顏色給六稜柱的 12 個頂點染色，使得同一側稜的兩端點同色，用來表示一對老搭檔運動員。由題意，只要求出從 12 個著色點中任取 5 個不同色的點的不同取法即可。這可分兩個步驟完成：第一步，先求從 6 種顏色中任取 5 種的取法，共有 $C_5^6 = 6$ 種；第二步，因為圖中的 6 個染色點中同色點各 2 個，所以第一步中的每一種 取法均有 $(C_1^2)^5 = 32$ 種搭配方式，故由乘法原理，完成這件事共有 6 × 32=192 種方法，即選派 5 名運動員共有 192 種方法。

本例題運用圖形模式法解題的奇妙之處在於把問題轉化。

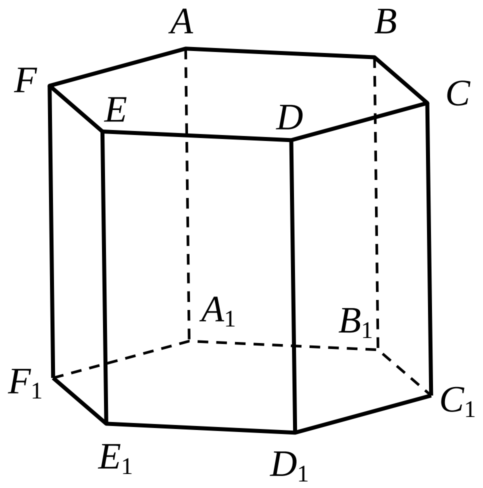

圖　四

例四　求值：$\sin^2 10° + \cos^2 40° + \sin 10° \cos 40°$

分析　本題可以運用對偶式的方法求解。而如果注意到式子特徵 "$a^2 + b^2 + ab$"，聯想到 "$a^2 + b^2 - 2ab\cos C$"，可得到更簡潔的圖形模式法。

設在ΔABC中，$A = 10°$，$B = 50°$，其外接圓的直徑 $2R = 1$，則由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ 得 $BC = 2R \sin A = \sin 10°$，$AC = 2R\sin B = \sin 50° = \cos 40°$。另外，$\angle ACB = 180° - 10° - 50° = 120°$，亦由正弦定理得 $AB = 2R \sin 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad & \sin^2 10° + \cos^2 40° + \sin 10° \cos 40° \\
= \quad & BC^2 + AC^2 - 2BC \times AC \times \cos 120° \\
= \quad & AB^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

綜合分析以上問題，可以看出，圖形模式法是一種重要的數學研究方法，它以新的視角處理問題，其最大特點在於直觀，能使題中複雜抽象的數量關係在圖形上清晰地表達出來，使問題迎刃而解。在圖形模式法的應用過程中，關鍵在於敏銳的觀察和合理的聯想，可進一步拓寬思維的渠道，是發展創新意識與創新能力的極佳契機。

作者電郵： f_hailun@163.com