也談瓦西列夫不等式的一種推廣

張　贇

陝西省西安市第一中學

文 [1] 介紹了一組俄羅斯《中學數學》雜誌上刊登的不等式題，其中阿・尼・瓦西列夫不等式為「若 a、b、$c > 0$，$a + b + c = 1$，則 $\dfrac{a^2+b}{b+c}+\dfrac{b^2+c}{c+a}+\dfrac{c^2+a}{a+b}\geq 2$。」

文 [2] 將其推廣為「若 a、b、$c > 0$，$a + b + c = 1$，$\lambda \geq 1$，則 $\dfrac{\lambda a^2+b}{b+c}+\dfrac{\lambda b^2+c}{c+a}+\dfrac{\lambda c^2+a}{a+b}\geq \dfrac{\lambda+3}{2}$ 。」

文 [3] 又給出「若 a、b、$c > 0$，$a + b + c = 1$，$-1 \leq \lambda \leq 1$，則 $\dfrac{a^2+\lambda b}{b+c}+\dfrac{b^2+\lambda c}{c+a}+\dfrac{c^2+\lambda a}{a+b}\geq \dfrac{1+3\lambda}{2}$ 。」

實際上，我們還有以下結果：

定理　設 $a_i > 0$，$i = 1, 2, \ldots, n$，$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$，$n \geq 3$，則

$$\frac{a_1^{\ 2}+a_2+\cdots+a_{n-1}}{a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_2^{\ 2}+a_3+\cdots+a_n}{a_3+a_4+\cdots+a_1}+\cdots+\frac{a_n^{\ 2}+a_1+\cdots+a_{n-2}}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}\geq n-1。$$

證明　$\because$　$a_i > 0$，$i = 1, 2, \ldots, n$，$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$，$n \geq 3$，

$$\therefore\quad \frac{a_1^{\ 2}+a_2+\cdots+a_{n-1}}{a_2+a_3+\cdots+a_n}=\frac{a_1(1-a_2-\cdots-a_{n-1})+(a_2+a_3+\cdots+a_n)}{a_2+a_3+\cdots+a_n}$$

$$=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}-a_1(a_2+a_3+\cdots+a_n)}{a_2+a_3+\cdots+a_n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{a_2+a_3+\cdots+a_n}-a_1\ ,$$

同理　$$\frac{a_2^{\ 2}+a_3+\cdots+a_n}{a_3+a_4+\cdots+a_1}=\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_3+a_4+\cdots+a_1}-a_2\ ,$$

$$\cdots=\cdots ,$$

$$\frac{a_n^{\ 2}+a_1+\cdots+a_{n-2}}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}} = \frac{a_n+a_1+\cdots+a_{n-2}}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}-a_n \text{。}$$

上述 n 個等式相加，由 A.M. ≥ G.M. 及 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$，得

$$\frac{a_1^{\ 2}+a_2+\cdots+a_{n-1}}{a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_2^{\ 2}+a_3+\cdots+a_n}{a_3+a_4+\cdots+a_1}+\cdots+\frac{a_n^{\ 2}+a_1+\cdots+a_{n-2}}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}$$

$$= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_3+a_4+\cdots+a_1}+\cdots+\frac{a_n+a_1+\cdots+a_{n-2}}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

$$\geq n\times\sqrt[n]{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{a_2+a_3+\cdots+a_n}\times\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_3+a_4+\cdots+a_1}\times\cdots\times\frac{a_n+a_1+\cdots+a_{n-2}}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}} - 1$$

$$= n-1$$

參考文獻

[1] 李學軍、戎松魁（2006）。一組優美的不等式。《數學通訊》，2006（21）。

[2] 宋慶（2007）。兩組優美不等式的推廣。《中學數學》，2007（4）。

[3] 李永利（2008）。瓦西列夫不等式的推廣。《數學通訊》，2008（1）。

作者電郵：zhangyunyuan@mail.china.com