

滬港兩地小學數學教師的探究策略

盧錦玲

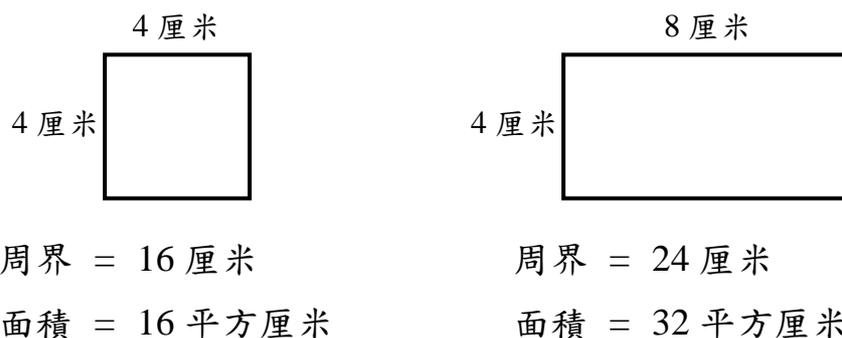
華東師範大學

引言

學生的數學學習過程中，不時會從觀察中得出一些發現，而這些「發現」往往是教師未曾考慮過或接觸過的。當香港及上海教師面對這些情況時，他們的處理方法是否不同？他們的探究方法是否有差異？筆者曾借用馬立平（1999）研究的一道情境題，探討兩地教師面對不確定的陳述的態度及探究能力。

方法

假想你的一名學生很興奮地走到課室。她告訴你，她找出了一個理論，這個理論是你不曾告知學生的。她解釋說：她發現一個閉合的圖形的周長增加時，它的面積也增加。她向你出示了這幅圖證明她的理論：



你會對這名學生如何反應？

圖一：假想任務情境 —— 探究題

筆者分別向兩地各 12 位小學數學教師出示一道情境（見圖一），進行半結構性的訪談。這題目翻譯自馬立平（1999）的研究，該研究採用此題

比較中美教師面對新知識時的探究策略。該研究發現，美國教師處理此情境的策略有三種：一、嘗試查閱資料；二、嘗試找尋更多的例子；三、嘗試採用數學的方法探討。而中國教師的反應分為兩類：一、嘗試證明該錯誤的陳述是正確的；二、否定該陳述。而在第二類的教師中，研究指出他們的策略顯示教師對數學的理解，分為四個層次：一、尋找反例否定陳述；二、發掘面積與周界的關係的不同可能性；三、澄清陳述成立的條件；四、解釋陳述成立的條件。

馬立平更指出，教師面對新知識時要能進行探究，需要

- 有動機；即教師要有信心及興趣，對問題是否有被解決的可能性的態度；
- 有策略；即對數學思考的認知，例如：反例的作用；
- 有對數學的基本原則的認知，例如：一個數學命題成立的條件；
- 有數學學科知識，即計算面積及周界的知識。

分析結果及討論

同樣地面對學生提出的「一個閉合的圖形的周長增加時，它的面積也增加」這個陳述，本研究的兩地受訪者能在正確的理由下否定陳述的人數相同（見表一）。這結果與筆者的研究中其他題目的結果不一樣（通常上海教師的錯誤比香港教師少），原因值得進一步分析。

	對陳述 未能作判斷	對陳述 作錯誤判斷	對陳述作正確判斷	
			給予不正確理由	給予正確理由
港	2	3	0	7
滬	0	4	1	7

表一：滬港兩地受訪者對「一個閉合的圖形的周長增加時，它的面積也增加」陳述的判斷

(a) 面對新知識時進行探究的動機

觀察一：香港教師對進行探究的動機較上海的強

面對學生的陳述，不是所有上海受訪者都曾嘗試找反例的。12 位上海受訪者中，有 5 位沒有嘗試找反例（見表二）。這不代表他們的邏輯思維理解不足，只是他們對陳述作出判斷前是否需要進行探究，有不同的理解。如上海受訪者 SHX 依他的認知對陳述作判斷，便認為判斷理應如此，而沒有嘗試找進一步推敲陳述是否正確。

「我覺得在小學階段，他們目前的學習水平來說，我認為應該是正確的。（為什麼呢？）他既然是個閉合的圖形，隨著他周長的不斷增加，他的面積也應該是隨著增加的，好像是平面圖形的話，應該是這樣的 (SHX, 11-15)¹。」

	沒有嘗試找反例	有嘗試找反例	
		未能找到反例來否定陳述	找到反例否定陳述
港	0	5	7
滬	5	0	7

表二：滬港兩地受訪者對陳述作判斷時曾考慮的策略

由此可見，兩地受訪者對處理探究問題的取向存在差異。較多上海受訪者傾向依個人的知識對陳述加以判斷，不一定認為需要進行探究。相反，香港受訪者對陳述都願意進行探究才作出判斷，但因為能力及策略的問題，探究的結果未必一定正確。

(b) 面對新知識時進行探究的策略

觀察二：兩地教師能以邏輯的方法進行探究，對反例的作用有一定的認識

觀察三：上海教師探究策略較香港的有系統

1 標示方法：(SHX, 11-15) 指一位小學數學教學年資 11-15 年的上海受訪者 X；HKB 則指香港受訪者 B。

情境中，學生採用了長方形及正方形各一個例子，來表達「一個閉合的圖形的周長增加時，它的面積也增加」的結論（見圖一）。與馬立平的研究不一樣，兩地全部 24 位受訪者面對此情境時，都沒有考慮查閱資料。兩地受訪者普遍知道反例的作用，知道即使能列舉很多例子，也並不代表結論一定成立，只要能列舉一個反例，便能推翻結論。

「他用了一個例子來表達這個情況，其實是不能得出一個結論的。因為你要證明的話，即是任何的情況下，你的結論都可以成立的。但是，你只是舉了一個例子，你只是拿出一個例子來表達你的理論，其實可能千千萬萬不同的例子，其中可能有一些是不成立的。這是你未找到出來的，不代表沒有的 (HKH, 11-15)。」

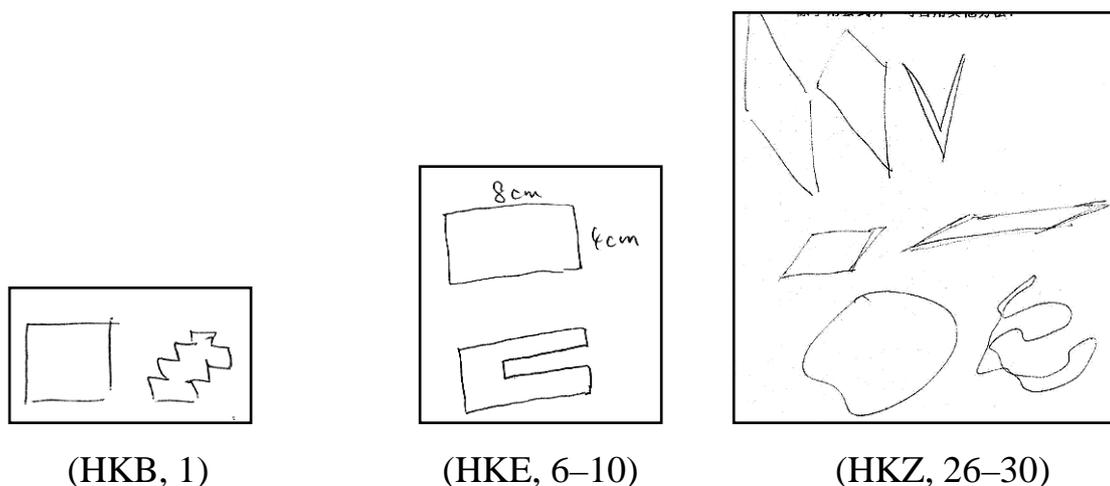
探究過程中，全部 12 位香港受訪者都不滿足於列舉更多符合陳述的例子，而是嘗試找反例來否定陳述（見表二）。雖然因為探究方法欠系統，找反例的過程中隨意地挑選數字去決定反例圖形的大小，部分受訪者最終未能找出一個適合的例子來否定陳述。但是，基本上，全部 12 位香港受訪者對邏輯的理解都有一定的基礎。相反，那些曾嘗試找反例的上海受訪者中，因為他們採用有系統的方法，如：先把其中一個變量固定，所以全部能成功地找到反例。

觀察四：香港教師傾向採取具體、直觀闡釋方法，學生容易理解；上海教師傾向採取抽象、與其他重要數學概念多連系的方法闡釋，對學生數學能力要求較高

兩地受訪者的探究策略大致分為四類（見表三），最普遍採取的策略是用公式及數字計算，列舉實質的反例。香港受訪者明顯較上海受訪者傾向採取具體的、直觀／動手的方法，如：使用繩或鐵綫圍出不規則圖形，或用方格紙。從受訪者繪畫的圖形可見，香港受訪者的靈活性頗高，除了基本的直綫圖形外，亦給予曲綫的、不規則封閉圖形（見圖二）。由於香港受訪者採用的方法十分具體及直觀，如用於向學生解說，能簡單直接地反駁學生的陳述，學生較容易理解。

	具體 -----> 抽象			
	用直觀／動手的方法	使用公式及數字計算	觀察及推理公式變量關係	發掘面積與周界的關係的不同可能性
港	10	10	2	0
滬	2	11	7	1

表三：滬港兩地受訪者探究時曾採取的策略



圖二：香港受訪者採取直觀／動手的方法探究策略的例子

在訪談的過程中，雖然也有 5 位上海受訪者提及可以使用一些直觀／動手的方法，但真正落實使用或顯示直觀／動手方法的只有 2 位，他們嘗試從圖形面積及周界公式，推論圖形邊長的變化與其面積及周界變化的對應關係（見圖三）（雖然推論結果不一定正確）。相對於直觀的方法，如用於向學生解說，此類方法對學生的數學能力要求較高，而且他們在探究過程中，亦較多嘗試與其它數學知識聯繫。

「除了那個長方形和正方形以外，我們學了三角形的面積以後還可以通過三角形的面積也可以達到相同的效果。比如說在這兩條平行綫裏面我們拉兩個三角形出來，要求它的底都是一樣的。從這裏可以看出，一個可以拉出周長比較小的三角形，還有一個就可以拉出一個周長比較大的三角形。雖然

周長有大小之分，但是它的面積應該是一樣的，它動用的原理就是三角形的等底等高，他們的面積應該是一樣的 (SHG, 6-10) (見圖四)。」

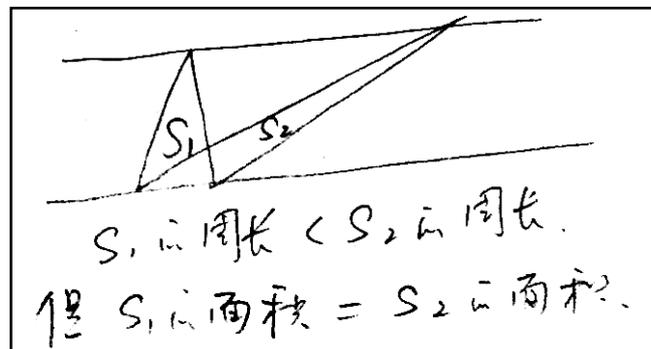
$$C = 2(a+b)$$

$$S = a \times b$$

a, b 的增加, S 也增加.

(SHE, 6-10)

圖三：上海受訪者採取觀察及推理公式變量關係的探究策略例子



圖四：上海受訪者 SHG 的探究過程

上述受訪者利用了三角形等底等高等面積的原理，另一位上海受訪者利用正方形與平行四邊形的從屬關係，若周界不變，底不變，高及面積相應減少的特點。兩者都是一些重要的數學概念。受訪者要能在探究的過程中融入其它重要的數學概念，必須有豐富的學科知識，掌握概念間的連系點。

除了配合其他數學概念外，其中一位上海受訪者 SHF 還嘗試了較抽象的方向，引導學生發掘面積與周界的關係的不同可能性（見表三）。這些都反映了上海受訪者對學生的數學能力期望較香港的高，而這些數學思考成份高的探究過程亦有助加強學生數學概念的連繫性，提升學生的數學能力。

總結

從上述數據分析及討論可見，兩地受訪者對探究問題時，在動機及策略兩方面都存在差異。比較兩地受訪者，面對不確定的情境時，上海受訪者對自己所作的判斷信心較強。香港受訪者較願意先研究，後判斷。教師能有信心地給予學生肯定而正確的答案，固然能發揮教師為學生釋疑解困的角色，但亦可能降低了學生探究及質疑的欲望。與學生一起探究，能發揮教師作為輔助者及促進者的角色，引領學生經歷求知的過程。

然而，教師不單要引領學生，亦要引領學生往正確的方向。因教師缺乏有系統的探究，影響了香港受訪者對陳述作出正確判斷的成功機會。上海的受訪者的基礎知識穩固，探究過程中對學生數學能力要求較高。如學生的學習能跟上教師的要求，數學的基礎會十分扎實。但因為教師使用的方法較抽象，數學學習基礎知識不穩固的學生理解會感到吃力。香港受訪者的策略較直觀，規範較少，故採用的圖形頗具創意，較易讓學生理解，亦較能照顧數學能力較弱的學生。然而，學生達到基本理解之餘，教師如何進一步提升學生的數學能力，培養學生的數學思維，這是香港的教師需要探討的空間。相反，在提升學生數學思維之餘，如何兼顧數學能力較弱的學生的需要，這是上海的教師需要考慮的問題。

參考文獻

Ma, Liping. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics - Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. London, Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

作者電郵：pollylao@hotmail.com