考試《年報》對學與教的啟示[1]

楊振雄

仁愛堂田家炳中學

引言

一直以來，學生對附加數學科存在極端的感覺 —— 有些學生覺得它很難，完全不明所以，有些卻覺得一點都不難，甚至可以「只管做，不要問」,「不求甚解」亦能讀好它。爲甚麼會有這麼大的差異呢？

此外，有人說 2006 年的會考試卷有了重大的改變，單靠操練歷屆會考題，已不能再考獲好成績了。那麼，怎樣才能夠幫助學生好好學習、考取好成績呢？最直接的方法就是參考《會考年報》(以下簡稱《年報》)。

考評局每年將考生表現較差的課題，或作答欠佳的地方匯集爲《年報》,就是很好的學習重點和方向。雖然附加數學科將隨著新高中出現而消失，不過，筆者覺得這些分析對將來新高中數學課程的教學仍有很大的參考價值。

對 1996 至 2005 的中學會考附加數學科科目《年報》進行分析，可從三個方向窺探考生的表現：學習難點、作答技巧、一般建議。

1. 學習難點

《年報》就學生的「一般表現」分爲七個等級：甚佳（Very good)、良好（Good, well answered)、尙算滿意（Satisfactory)、尙可（Fair)、欠佳（Unsatisfactory)、差劣（Poor)、甚劣（Very poor)。

而評語經常是「普通」、「差劣」、「甚差」的課題就是學習難點；包括複數、不等式與絕對值、三角學上兩個面的夾角及微分上的變率問題等。

1.1 複數

《數學教育學習領域附加數學課程指引（中四至中五）2001》(以下簡稱《指引》)，把《複數》整個單元被刪去，但是，它仍是純數科的重要單

---

1 黃毅英教授啟發本文創作，後期修改亦給予本人良多的建議，特此鳴謝。

元，了解學生在會考常犯的毛病，對教授此課題有一定幫助。

在長題目，複數的考題可分爲兩類：幾何問題（1996P1Q12[2]、1998P1Q12、1999P1Q11、2000P1Q11、2001Q17、2003Q16）、應用棣美弗定理（De Moivre's Theorem）去處理方程問題（1997P1Q11、2002Q18）。除了 1997 年外，其他年份均錄得最低選答百分率。

考生在 2001 年的表現是「差劣」或「甚差」，分爲三部份的考題，考生在 1996 年、1998 年、1999 年未能作答至 (b) 部份。關於複數的幾何問題，考生在 1996 年、1998 年、2000 年「鮮有明白複數的幾何意義」，在 1999 年、2003 年「對輻角的幾何詮譯欠透徹理解」，在 2002 年「對輻角只有差劣的了解，未有注意輻角的主值（principal value）介乎 $-\pi \le \theta \le \pi$」；在 2002 年考生混淆了實數的絕對值與複數的模（modulus），得出錯誤的算式 $|w^2+9| = |w|^2+9$；在 2001 年，基於差劣的幾何知識，考生會以代數手段去解決幾何問題，做出許多冗長和笨拙的計算。

考生對複數標準式（standard form）（1996 年）、極式（polar form）（1997 年、1998 年、1999 年、2000 年、2002 年、2003 年）的概念仍然混淆，不善於相互變換的技巧。例如 1997P1Q6 要求考生在阿根圖（Argand diagram）上繪出圓形 $|z-(3-4i)| = 3$ 及找出在圓形上具最少模的點，又例如 1998P1Q7 要求考生解聯立方程 $\begin{cases} |1+z| = |3-z| \\ z\bar{z} = 4 \end{cases}$（也就是要找出亞根圖上直線 $|1+z| = |3-z|$ 與圓形 $z\bar{z} = 4$ 的交點），這些題目要求簡單，可是考生仍未能窺探箇中特質，仍以代數或解析的方法答題，顯示他們未能掌握一個數的幾個表示方式（representation）的互換，亦未能利用共軛數把兩個複數相除後，化成標準式，更遑論棣美弗定理在化簡複數冪的美妙作用。

1.2 不等式

不等式與絕對值是另一個學習難點，在 2002 年新的課程綱要裡，形如「$\dfrac{ax+b}{cx+d} \ge k$」的不等式被刪去，「絕對值符號」之使用中亦刪去「含絕對值的不等式」及「絕對不等式」。

2 "1996P1Q12" 表示 1996 年卷一第 12 題。下同。

在 1996P1Q3、1997P1Q5、2001Q11，考生作答形如「$\dfrac{ax+b}{cx+d} \geq k$」的題目時，評語是「尚可」和「尚算滿意」。不過，《年報》卻指出，考生就變數的不同取值解題後，竟不懂得運用連接詞「和（and）」及「或（or）」將答案簡化。不少考生亦忽略當分母的變數取不同數值時，不等號會轉向的事實，草率地移動分母（例如，1997 年 Q5）。《年報》亦一再指出大量考生忘記捨棄會令數式不定義（undefined）的 x 值。

考題含絕對值的等式，評語比較好，在 1999P1Q3、2000P1Q5(a)、2004Q8 是「良好」，2005Q7 是「尚算滿意」。不過，考題涉及不等式，評語立即變為「尚可」（1998P1Q6(b)）、「欠佳」（2002Q7(b)）及「差劣」（2003Q5）。因為考生拆解絕對值等式時，毋須考慮「和」及「或」等連接詞，亦毋須擔心不等號轉向的問題。這些容易被隱藏的弱點，在不等式原形畢露，較典型的題目是 2003Q5，很多考生解不等方程 $x^2 > |x|$，有以下的解答：

$$x^2 > |x|$$

$$x^2 > x \qquad\qquad x^2 > -x$$

$$x(x-1) > 0 \qquad\qquad x(x+1) > 0$$

$$\therefore \qquad x > 1 \qquad\qquad x < -1$$

這樣的解答看似是對的，卻並不正確。「很多考生對絕對值概念欠缺透徹的理解，雖然知道 $|x| = x$ 或 $|x| = -x$，卻不明瞭 x 在每個情況中的取值範圍。結果，他們嘗試處理不等式 $x^2 > |x|$ 中的絕對值符號時很容易犯錯。此外，考生在處理不等式時，往往把連接詞『和』及『或』混淆不清。」（見《附加數學考試報告及試題專輯》2003 年第 50 頁）雖然不少「失分」的表現在於疏忽和運算上的漏動，但考生將四則運算的一般法則不加考慮地移到絕對值上使用，其實正反映出考生對有關概念缺乏真正的理解。

1.3 二次函數

二次函數（quadratic function）是類似不等式的學習難點。以兩道題為例，1999P1Q4：「設 $f(x) = 2x^2 + 2(k-2)x + k$，求 $f(x) = 0$ 的判別式；並求 k 的範圍使 $y = f(x)$的圖像位於 x 軸之上」，2005Q5：「若對所有實數 x，$x^2 - x - 1 > k(x-2)$，求 k 的範圍」。單從字面上看，兩題幾乎南轅北轍，但想深

一層，都在問同一件事。「$y = 2x^2 + 2(k-2)x + k$ 的圖像位於 x 軸之上」根本就等價於「對所有實數 x，$2x^2 + 2(k-2)x + k > 0$」。解題時的常見錯誤是聲稱「$\Delta > 0$」或「$\Delta \geq 0$」。考生見到「對所有實數 x（for all values of x）」，就會聯想到形如 2001Q9 的題目類型：「若對所有實數 x，$p = \dfrac{x^2+2x+8}{x-2}$，求 p 的範圍」。這問題的重點在於「任取 x 值，求 p 的範圍」，也就是還原成方程 $x^2 + (2-p)x + (8+2p)x + 8 = 0$ 時有解；這時「$\Delta \geq 0$」。但 $2x^2 + 2(k-2)x + k > 0$ 及 $x^2 - (k+1)x - (2k-1) > 0$ 卻是還原成方程 $2x^2 + 2(k-2)x + k = 0$ 及 $x^2 - (k+1)x - (2k-1) = 0$ 時無解；這時「$\Delta < 0$」。這些題目的用詞相似，意義卻相差很遠，考生一不小心就會犯錯。

1.4 三角學

三角學上兩個平面的夾角，是另一個經典難點。1991P2Q6 問及「一個正方錐體兩個側面的交角」，1992P2Q7、1993P2Q7、1995P2Q7 也有類似一問，變的只是角錐體底的形狀而已。在 1995 年，這問題終於得到較「滿意」的結果。到 2001Q15(b)(ii)、2002Q17、2004Q11 才再度出現。但考生的表現仍是「欠佳」、「尚可」、「甚差」。空間想像力一向是香港學生最弱的一環，因爲學生甚少繪畫立體透視圖，實在難以建立空間結構中各種元素（如面、角等）的關係，更遑論抽絲剝繭地勾出未知角所在的三角形，將立體問題變成平面上特定三角形的問題（以簡馭繁）了。

1.5 微分

微分在長題目的三大考題是「描繪圖像（Graph sketching）」、「極值問題（maximum and minimum problem）」、「變率問題（rate of change）」，在 2001 年前，每年均見其二；其中變率問題最爲困難，以致考生選答率偏低（2005Q18 爲 35%、1998Q13 爲 47%、1997Q12 爲 37%、1996Q11 爲 53%），選答百分率只比最差的複數好一點。對考生表現的評語多是「尚算滿意」、「尚可」、「差劣」之間。事實上，從了解問題，將文字轉化爲數式，到公式「$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} \times \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$」的應用，每個步驟都是數學能力的高度體驗，對只習慣機械地操練的學生來說，當然是難題。還有，變率何時取正值，何時取負值，亦是學生難以掌握的地方。

另外，在拐點處，函數不一定二次可導（例如 $f(x) = \dfrac{x\,|x|\,(x+1)}{x-1}$），其一階導數亦不一定等於 0（例如 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$）。這些要點涉及拐點的意義，學生必須清楚明白。

2. 作答技巧

考生答卷時，犯了輕微錯誤或表達欠佳，會被扣「pp –1」或「u –1」[3]。「作答技巧」雖然是應試的手段，不是學習的目的，但有條理地以數學語言去陳述解題方法，也是數學學習的重要訓練。更重要的是，表達欠佳往往顯示學生缺乏概念上的全面理解。掌握這些常犯錯處後，除了讓學生多留意錯處隱含的數學意義外，亦應該讓學生明白數學的演算是嚴格的。

2.1 積分常數

積分常數的使用問題，幾乎每年都見報（1996P2Q6、1997P2Q2、1997P2Q5、1998P2Q4、1999P2Q2、2000P2Q1、2000P2Q7、2001Q2、2003Q1、2004Q1、2004Q17(a)(i)、2005Q1、2005Q10）。典型題目為：「若曲線 C 於點 $(x\,,\,y)$ 的斜率為 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 + 1$，求該曲線的方程（2004Q3）（亦見於 2000P2Q6、1999P2Q6、1998P2Q4、1997P2Q5、1996P2Q6）」，考生的解答常常如下：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 3x^2 + 1\\ &= \int (3x^2 + 1)\,\mathrm{d}x\\ &= x^3 + x\end{aligned}$$

考生的「解答」通常有三個錯誤：一、漏掉積分常數（除了粗心大意這原因外，亦反映考生忘記原函數（primitive function）並非唯一這一性質）；二、漏掉「$y =$」（誤把「=」等同「得到」的意思）；三、求得積分常數後錯誤地將曲線函數寫成方程 $x^3 + x - 2 = 0$。此外，積分涉及的「dx」符號，也是考生常常漏掉的（1999 年、2000 年、2004 年、2005 年）。

---

3 “pp” 即「表達差劣（poor presentation）」，會被扣減 1 分。“u” 即「單位錯誤」，例如忘了寫單位或用了不定確的單位，亦會被扣減 1 分。

2.2 導數運算

2003Q4 問：「對於 $3x^2+3y^2-2xy=12$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。」由於考生粗心大意地使用括號，往往誤將 $-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2xy)$ 計算為 $-2y+2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $-2y+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$（類似錯誤亦見於 1999P1Q6、1998P1Q8）。這種粗心大意的錯誤，說明了考生對符號未能純熟，也未能培養出對符號運算的感覺（sense）及察覺錯誤（error-detecting）的意識。

在處理變率問題時，考生亦常常漏掉單位。

2.3 向量

在向量方面，常見的錯誤有「未有應用向量的箭咀符號（vector sign）」、「漏了點積（dot product）的點（dot sign）」、「不恰當的向量表示，例如將 $\vec{a}\cdot\vec{a}$ 寫成 $\vec{a}^2$、$\dfrac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{OA}}=\dfrac{1}{3}$」等（如下表列）。

錯誤類別 \ 年份	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
箭咀符號	Q7, Q10	Q7	Q5	Q7		Q8	Q10	Q6		Q11
點積的點	Q7, Q10	Q7				Q8	Q10			
不恰當的向量表示	Q10	Q9		Q7		Q8	Q13	Q6	Q6	Q11

學生把數字運算的通則草率地搬到向量去，向量的運算與實數相似，並不完全相同。學生應注意那些特質是向量所沒有的（例如對向量求斜率），亦應留意點積符號與乘號的分別。

2.4 三角學

常見毛病型如 2004 年 Q5「求方程 $\sin 3x+\sin x=\cos x$ 的通解（亦見於 1996 年 Q1）」。右邊的 $\cos x$ 是個陷阱，考生的解答常常如下：

$$\sin 3x+\sin x=\cos x$$
$$2\sin 2x\cos x=\cos x$$
$$2\sin 2x=1$$

兩邊刪去 $\cos x$，漏掉 $\cos x = 0$ 的解。這是初中解方程不求甚「解」的結果，以爲任何情況都可以用「移乘作除」消去公因子，忽略了因子等於零或不定義的情況。

此外，考生求通解時，亦容易出現下列差劣的表達：

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{1}{2} \\ x &= 30^\circ \\ x &= 180^\circ n + (-1)^n 30^\circ \end{aligned}$$

考生直接將解題的想法寫出，先求主值，再寫出通解，忽略了解題的邏輯性。考生亦容易將角度（degree）與弧度（radian）混在一起，給出如 $x = n\pi + (-1)^n 30^\circ$ 的答案。

2.5 二項式定理

考生「對等號的使用較輕率，他們不應漏掉『$(1 + 2x)^6 = 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + \ldots$』右邊的『…』符號（2004Q2）（亦見於 1996Q2）」。其實，考生將注意力放到前幾項上，才會略去代表較高次項的「…」號。考生更應明白，只有在天秤的另一端放入「…」，等式才能成立。

另一常見錯誤如下（2002Q1）（亦見於 1997P2Q8、1999P2Q7）：

$$\begin{aligned} C_2^n &= 15 \\ n^2 - n - 30 &= 0 \\ n &= 6 \text{ 或 } n = -5 \end{aligned}$$

一般來說，考生取捨方程的解時，常憑「經驗」處理；當解應用題時，因爲負值解在現實世界不可能存在，考生都懂得捨去（有些學生更會集非成是，凡見到負值解都棄去），卻對那些不可能的正值解卻疏於提防（如解方程 $\sqrt{x+2} = x - 4$，$x = 2$ 須捨去）。由於二項式定理比較抽象，考生就失去「指數必須取正值」的警覺，因此在上題中，忘記捨去不可能的解 $n = -5$。

2.6 數學歸納法

考生很喜歡設命題爲 $P(n)$ 或 $S(n)$，卻搞不清命題（statement/

proposition）與數式（expression）、數列（sequence）的分別，寫出如下的錯誤：

設 $P(n)$ 為「對所有正整數，$9^n - 1$ 可被 8 整除」。

當 $n = 1$ 時，$P(1) = 9^1 - 1 = 8$。（2004Q7）

或：

設 $S(n)$ 為「對所有正整數，$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$ 」。

當 $n=1$ 時，$S(1)=\frac{1}{2}=2-\frac{1+2}{2^1}=\frac{1}{2}$ 。（2003Q7）

這種將命題當數列的錯誤，常見於《年報》（1996P2Q4、1997P2Q7、2000P2Q4）。這不是代號的問題，而是未弄清楚要證的是怎樣的命題；當命題不是一個等式時就「原形畢露」了。

此外，考生利用數學歸納法證明命題時，常給出不正確或表達欠佳的句子（2005Q8）：

假設 $n = 1$ 時，命題為真。

假設 $n = k$ 時命題為真，其中 k 為任意<u>整數</u>。

假設命題對<u>所有</u>正整數為／<u>所有</u>整數為真。

根據數學歸納法原理，命題對所有<u>整數</u>／所有<u>實數</u>為真。

考生必須明白數學歸納法的證明是嚴格的，一字一語的運用也應小心！「整數」與「正整數」、「一些（some）」與「所有（all）」只有少許差異，而落在證明的句子裡卻有很不同的意義。

<u>2.7 其他</u>

「答案未有用真確值（exact value）表示」也是常見的不小心錯處。較有代表性的錯誤如 2003Q10(b)：考生求得 $\tan(\frac{\alpha+\beta}{2})=\frac{4}{3}$ 後，以計算機求得 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ = 53.13°，最後得 $\tan(\alpha + \beta) = \tan(103.26°) = -\frac{24}{7}$ ，儘管答案

正確，但考生一動計算機，就會失去得到真確值的說服力。

此外，考生重組方程時，常常漏掉「= 0」(1998P1Q2)。利用法線式求垂直距離、在坐標幾何使用面積公式及計算兩直線的交角時，常常漏掉絕對值號（1996P2Q7、1998P2Q5、2001Q10)；繪圖時忘了標示 x 軸和 y 軸（1996P2Q7、2002Q5)。要求考生驗證點 $(6\cos\theta, 6\sin\theta)$ 在圓方程 $x^2 + y^2 = 36$ 上（2004Q14），有如下欠佳的表達：

$$\begin{aligned}(6\cos\theta)^2 + (6\sin\theta)^2 &= 36\\ 36\cos^2\theta + 36\sin^2\theta &= 36\\ 36 &= 36\end{aligned}$$

考生未將同類項簡化，例如將 $12x - 3y + 2 = 10x + 1$ 表示爲答案；通解則寫成 $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$。這兩個情況算是錯誤，不會得到分數。答案未以最簡單形式表示，例如 $\frac{dy}{dx} = \frac{x\cos(x^2+1)}{x^2}$、$x = \frac{4}{8}$、$20x - 30y = 0$ 等，雖然算不上錯誤，仍會被扣分。

從上可見，大部分「一時疏忽」及「表達問題」的背後，其實都顯示了學生理解的不全面和概念的缺憾。這些「瑣碎」錯處正是闡釋背後理念的尚佳載體，我們必須抓緊這些重點爲學生補足理解的缺憾。

3. 一般建議

「一般建議」最易被忽略，因爲那些建議都是「老生常談」，好像說了等於沒說。

《年報》的一般建議，很多與課題相關。2005 年的 14 點中，有 8 點與課題相關。這些建議，在「作答技巧」已能體現，另一半才是考生最易忽略、最應該注意的「一般建議」！

考生「須詳細列出解題步驟及給出恰當的解釋，以確保答案的完整性及合乎邏輯，亦應避免機械式背誦及漏掉關鍵步驟等陋習。(2005 年)」、「須提高以數學符號或利用文字表達的能力，以提出清晰及合乎邏輯的證明及

論據。(2003 年、2004 年、2005 年)」、「應小心閱讀試題及理解題意，並依題中指示作答(1997 年、1998 年、1999 年、2000 年、2001 年、2003 年、2005 年)。」、「宜提升分析及解難能力，以處理非標準類型及涉及非熟悉情況的問題(1999 年、2000 年、2002 年、2003 年、2004 年、2005 年)。」、「應留意本科試題會考核考生利用數學科和附加數學科的知識和技巧問題的能力(1999 年、2000 年、2005 年)。」、「應留意題目的條件及限制並謹記捨去不合理的答案(2000 年、2001 年)。」

這些建議，本來就是學習數學應有的態度和方法，爲甚麼一再見於《年報》呢？大家是不是爲了趕課程、爲了操練「會考秘技」，忽略了最基本的事情呢？

結語

筆者覺得，附加數學科一直存在「內容空洞，技巧『高超』」的情況，以致有些學生可以「不求甚解」地取得好成績，有些學生卻讀得苦不堪言。雖然附加數學科已是「夕陽」課程，但爲了讓最後幾年將會應考這科的學生學得更好，紮實讀純數的根基，筆者有以下的總結：

複數可算是附加數學的最難點！它有跨越學習課題的特質，考生始終難以理解爲何複數跟向量和坐標幾何有關。此外，複平面與 $\mathbf{R}^2$ 同構所帶出的幾何問題，亦是考生難以理解的(明明是代數，怎會是幾何？)。自新課程刪去複數後，在純數科教授此課題時，學生難以理解。我們不妨多花些時間，讓學生從不同角度去探索複數跨課題的特質。

不等式挑戰了解等式方程的習慣，加上不等式比較抽象，以致成爲學習難點。絕對値也因爲抽象難明成了學習難點。兩者走在一起，更是難上加難。因此，老師講授這些課題時，務必令學生明白箇中意義，切勿在學生不明究竟的情況下「死谷」學生。

二次函數的問題，與複數相似，難度在於跨越了二次方程、二次函數圖像、不等式等課題。講授此課題時，不妨多輔以圖像協助，讓學生將幾個相似卻又不盡相同的課題連結一起。

至於三角學中兩平面的夾角問題，牽涉對三維空間的想像能力，對沒有幾何功底的香港學生來說，從來都是學習難點。筆者建議以實物模型加

強學生的三維想像，甚或讓學生動手去製作模型，以增加「動手做」數學的能力。

相信沒有幾人會反對，學習附加數學就是爲了學微積分，因此微積分本身就是學習難點！微積分一課的題型很技巧導向、很典型、很單調；新課程亦將一定程度的學習難點刪去。考生最感困難的仍是變率問題和題目裡的開放性問題（open ended question）。開放性問題是近年考試改革的新取向，爲的是避免考生過份操練，過份機械性地「背誦解答」。遇上這些題目，不妨花點時間跟學生好好地討論，別爲了趕課程，一下子說出答案。

參考文獻

香港課程發展議會編訂（1992）。《中學課程綱要附加數中四至中五課程綱要 1992》。香港：香港教育統籌委員會。

香港課程發展議會編訂（2001）。《數學教育學習領域附加數學課程指引（中四至中五）2001》。香港：香港教育統籌委員會。

香港考試及評核局（1999）。《2000 年香港中學會考規則及課程專輯》。香港：香港考試及評核局。

香港考試及評核局（2006）。《2007 年香港中學會考規則及課程專輯》。香港：香港考試及評核局。

梁貫成（1999）。《亞洲及西方各主要國家及地區的數學課程比較》。香港：香港教育統籌委員會。

香港考試及評核局（1996 – 2005）。《香港中學會考試題》。香港：香港考試及評核局。

香港考試及評核局（1996 – 2005）。《香港中學會考考試報告》。香港：香港考試及評核局。

作者電郵: chyeung1@yottkp.edu.hk