分數和小數互化定理的推廣

王　劍
山東師範大學數學科學學院

呂蓮俊
濟南中學

本文的目的是把十進制情形下分數和小數互化定理推廣到 n 進制的情形。首先考察十進制形下的分數和小數的互化定理。

定理　設 $0 < a < b$，$(a, b) = 1$。若 $b = 2^{\alpha} 5^{\beta}$（α、β 是非負整數），則 $\dfrac{a}{b}$ 可以化為 t 位小數，其中 $t = \max\{\alpha, \beta\}$；反之，如果 $\dfrac{a}{b}$ 可以化為有限小數，則 b 的素因數祇能是 2、5。

我們注意到 10 的素因數恰好是 2 和 5，因此該定理討論的是特殊的 10 進制的情況。應用一般化的方法考慮一般 n 進位制情形，便得到了下面推廣的定理。

推廣定理　設 $0 < a < b$，$(a, b) = 1$，而且 $n = n_1^{p_1} n_2^{p_2} \cdots n_s^{p_s}$，$n_1$、$n_2$、⋯、$n_s$ 是 n 的所有互異素因數，p_i 為正整數，$i = 1, 2, \ldots, s$。若 $b = n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \cdots n_s^{\alpha_s}$，$\alpha_i$ 為非負整數，$i = 1, 2, \ldots, s$，則 $\dfrac{a}{b}$ 可以化為 t 位 n 進位制小數，其中 $t = \max\limits_{i=1,2,\ldots,s}\{\alpha_i\}$；反之，如果 $\dfrac{a}{b}$ 可以化為有限小數，則 b 的素因數祇能是 n_1、n_2、⋯、n_s。

推廣定理的證明　不妨設 α_1 是 α_1、α_2、⋯、α_s 中最大的一個。

則
$$\frac{a}{b} = \frac{a}{n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \cdots n_s^{\alpha_s}} = \frac{a n_1^{p_1\alpha_1-\alpha_1} n_2^{p_2\alpha_1-\alpha_2} \cdots n_s^{p_s\alpha_1-\alpha_s}}{n_1^{p_1\alpha_1} n_2^{p_2\alpha_1} \cdots n_s^{p_s\alpha_1}}$$
$$= \frac{a n_1^{p_1\alpha_1-\alpha_1} n_2^{p_2\alpha_1-\alpha_2} \cdots n_s^{p_s\alpha_1-\alpha_s}}{n^{\alpha_1}}$$

根據題意，$\dfrac{a}{b} < 1$，所以 $a n_1^{p_1\alpha_1-\alpha_1} n_2^{p_2\alpha_1-\alpha_2} \cdots n_s^{p_s\alpha_1-\alpha_s} < n^{\alpha_1}$。可以設

$a n_1^{p_1\alpha_1-\alpha_1} n_2^{p_2\alpha_1-\alpha_2} \cdots n_s^{p_s\alpha_1-\alpha_s} = a_1 n^{\alpha_1-1} + a_2 n^{\alpha_1-2} + \ldots + a_{\alpha_1-1} n + a_{\alpha_1}$，其中 a_i 是小於 n 的非負整數，$i = 1, 2, \ldots, \alpha_1$。

$$所以\ \frac{a}{b} = \frac{a_1 n^{\alpha_1-1} + a_2 n^{\alpha_1-2} + \ldots + a_{\alpha_1-1} n + a_{\alpha_1}}{n^{\alpha_1}}$$

$$= \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots + \frac{a_{\alpha_1}}{n^{\alpha_1}} = 0.a_1 a_2 \ldots a_{\alpha_1}$$（n 進制小數）。

反之，如果 $\frac{a}{b}$ 可以化為 n 進制小數，設 $\frac{a}{b} = 0.a_1a_2\ldots a_t$，$a_t \neq 0$，則 $a = b \times 0.a_1a_2\ldots a_t$，即 $a\,n^t = b(a_1 n^{t-1} + a_2 n^{t-2} + \ldots + a_{t-1} n + a_t)$。

因為 $(a, b) = 1$，所以 b 能整除 n^t。因此，b 的素因數祇可能是 n_1、n_2、…、n_s。

參考書目

余元希等（1988）。《初等數學研究》。高等教育出版社。

楊世明等（1998）。《數學發現的藝術》。青島海洋大學出版社。

作者電郵： 7676dyj@sina.com