整除性與循環小數的新發現

羅　楊[1]
華南師範大學附屬中學高二（11）班

在科學史上，往往重大的發現源於最簡單的知識與原理。「9 的乘法」是大家很熟悉的數學知識，天天在使用，我們是否對它有感覺？能否向前走一步，進而從中發現數學之間更有趣、更本質的規律？

一、整除性的統一判定法則

在小學我們就知道如下的一個重要結論：

結論 1　如果一個自數的各位數字之和能被 9 整除，則原數能被 9 整除，反之亦真。

證明　設原數為 $\overline{abc\cdots de}$ 是 n 位數，則 $\overline{abc\cdots de}$

$= a \times 10^{n-1} + b \times 10^{n-2} + c \times 10^{n-3} + \ldots + d \times 10 + e$

$= a(10^{n-1} - 1) + b(10^{n-2} - 1) + c(10^{n-3} - 1) + \ldots + d(10 - 1) + (a + b + c + \ldots + d + e)$

由於 $a(10^{n-1} - 1) + b(10^{n-2} - 1) + c(10^{n-3} - 1) + \ldots + d(10 - 1)$ 能被 9 整除，所以只要 $(a + b + c + \ldots + d + e)$ 能被 9 整除，則 $\overline{abc\cdots de}$ 能被 9 整除。

反之，只要 $\overline{abc\cdots de}$ 能被 9 整除，$(a + b + c + \ldots + d + e)$ 就能被 9 整除。

如數 95436 的數位和為 9 + 5 = 4 + 3 = 6 = 27，由於 27 可被 9 整除，所以 95436 能被 9 整除。其實可繼續進行的數位和，27 的數位和為 2 + 7 = 9，最後得到一個一位數。我們把最後這個一位數叫「**原數的根**」。

數位 95436 的數位和可以看成按以下步驟分步得到 95436 $\to$ 9543 + 6 $\to$ 954 + 3 + 6 $\to$ 95 + 4 + 3 + 6 $\to$ 9 + 5 + 4 + 3 + 6，以上數字都是 9 的倍數。這個過程不改變原數的根。由此得以下結論：

---

1 指導教師：羅碎海

結論 2　一個數，截去末位，並加上此末位數得一新數，當新數能被 9 整除時，原數就能被 9 整除；當新數不能被 9 整除時，原數便不能被 9 整除；當新數被 9 除的餘數是 r 時，原數被 9 除的餘數也是 r。

證明　設正整數 $A = 10x + y$（x 為大於零的整數，$y \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$）。這時，$A = 10x + y = 10x + 10y - 9y = 10(x + y) - 9y = 9(x + y) - 9y + (x + y)$。顯然，只要 $x + y$ 能被 9 整除，A 就能被 9 整除；$A = 10x + y$ 與 $(x + y)$ 除以 9 的餘數相同。

由此，我們可將結論推廣到任意數：

$$
\begin{aligned}
\text{由於 } A = 10x + y &= 10(x + y) - 9y & &= 10(x - y) + 11y \\
&= 10(x - 2y) + 3 \times 7y & &= 10(x + 2y) - 19y \\
&= 10(x - 3y) + 31y & &= 10(x + 3y) - 29y \\
&= 10(x - 4y) + 41y & &= 10(x + 4y) - 3 \times 13y \\
&= 10(x - 5y) + 3 \times 17y & &= 10(x + 5y) - 7 \times 7y \\
&= \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

可以得到許多新結論，如：

(1) 一個數，截去末位，並減去此末位數得一新數，當新數能被 11 整除時，原數能被 11 整除，當新數不能被 11 整除時，原數便不能被 11 整除。

(2) 一個數截去末位，並減去此末位數的 2 倍得一新數，當新數能被 7（或 3 或 21）整除時，原數能被 7（或 3 或 21）整除。

(3) 一個數截去末位，並加上此末位數的 2 倍得一新數，當新數能被 19 整除時，原數能被 19 整除。

(4) 一個數截去末位，並加上此末位數的 5 倍得一新數，當新數能被 7 整除時，原數能被 7 整除。

(5) 一個數截去末位，並加上此末位數的 4 倍得一新數，當新數能被 13 整除時，原數能被 13 整除。

……

例如：6992 能被 19 整除嗎？

應用上面的結論可知：6992 這個數中，$x = 699$，$y = 2$，$x + 2y = 699 + 2 \times 2 = 703$。703 比較大，所以用 703 作為新數，此時 $x + 2y = 70 + 6 = 76$。76 能被 19 整除（$76 = 19 \times 4$），所以 6992 能被 19 整除。

如果看不到 $76 = 19 \times 4$，還可以將 76 看成新數，這時 $x + 2y = 7 + 12 = 19$，顯然是 19 的倍數，所以 6992 能被 19 整除。

看到上面的那些具體判斷整除性的法則，問能不能再統一表示呢？我們可統一為兩個公式：$A = 10x + y = 10(x + ny) - (10n - 1)$ 及 $A = 10x + y = 10(x - ny) + 10(n + 1)y$。

這樣，上面的整除性問題可以統一用兩句說話：

結論 3　一個數截去末位，並加上此末位數的 n（$n \in \mathbf{N}$）倍得一新數，當新數能被 $10n - 1$（或 $10n - 1$ 的因數）整除時，原數可被 $10n - 1$（或 $10n - 1$ 的因數）整除。

結論 4　一個數截去末位，並減去此末位數的 n（$n \in \mathbf{N}$）倍得一新數，當新數能被 $10n + 1$（或 $10n + 1$ 的因數）整除時，原數可被 $10n + 1$（或 $10n + 1$ 的因數）整除。

很自然有人會問到：$10n - 1$ 或 $10n + 1$ 及其它們的因數能包含任意的自然數嗎？可以，我們用一個例子（尋找判斷能被 37 整除的數的規律）來說明：

首先 37 不具有 $10n + 1$ 或 $10n - 1$ 的特點，但 $37 \times 3 = 111$、$37 \times 7 = 259$，所以 $A = 10x + y = 10(x - 11y) + 111y = 10(x - 11y) + 3 \times 37y$。由此我們可以得到判斷方法：一個數截去末位，並減去此末位數的 11 倍得一新數，當新數能被 111（或 37）整除時，原數可被 111（或 37）整除。

也可以構造 $A = 10x + y = 10(x + 26y) - 259y = 10(x + 26y) - 7 \times 37y$ 式來得到整除性的判斷方法。從理論上來說，這種統一的方法我們找到了，在實際操作上可能並不是每步都能變簡單，可能是變複雜了。但不能由此就否定它的價值，畢竟是一個統一規律，可能有更深刻的背景。

二、循環小數的規律發現

先觀察以下幾個特殊分數（分母是不含 2 或 5 為其因數的單位分數）

與它的循環小數：

$$\frac{1}{19}=0.\dot{0}5263157894736842\dot{1}\text{、}\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}\text{、}\frac{1}{13}=0.\dot{0}7692\dot{3}\text{。}$$

可發現以下規律：

(1) 迴圈節末位數與分母之積的末位數是 9（這時的餘數才是 1，開始迴圈。或因為 $1 = 0.999\ldots999\ldots$，迴圈節末位數與分母之積的末位數是 9）；

(2) 迴圈節中自後往前的各個數字依次呈現某種倍數關係（有時進位）。

例如：$\frac{1}{19}$ 的迴圈節末位是 1，從後往前按 2 倍變化。$\frac{1}{7}$ 的迴圈節末位是 7，按 5 倍變化（即末位是 7，$7 \times 5 = 35$，即迴圈節倒數第二位為 5，$5 \times 5 = 25$，而 35 的十位是 3，所以迴圈節倒數第三位數為 $5 + 3 = 8$；依次類推）。$\frac{1}{13}$ 迴圈節末位是 3，按 4 倍變化 ……。又一次發現 19 與 2 倍有關，7 與 5 倍有關，13 與 4 倍有關。與公式 $A = 10x + y = 10(x + 2y) - 19y = 10(x + 5y) - 7 \times 7y = 10(x + 4y) - 3 \times 13y$ 完全聯繫。

如果分母中含有 2 或 5 為其因數的單位分數可分部進行，

如：$\frac{1}{14}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{2}\times 0.\dot{1}4285\dot{7} = 0.\dot{7}1428\dot{5}$。

三、用乘法算循環小數

用以上規律可得到分數化小數的新方法（以 $\frac{1}{13}$ 為何如下）：

計算 $\frac{1}{13}=0.\dot{0}7692\dot{3}$，可以用以下方法列式進行：

方法一（整體乘 4）：

(1) 先確定迴圈節的末位是 3（從 1 開始，逐個找，先找到 3，$13 \times 3 = 39$）；

(2) 由 $A = 10x + y = 10(x + 4y) - 3 \times 13y$ 式確定倍數為 4；

(3) $3 \times 4 = 12$ 向左移一位寫 12，再 $12 \times 4 = 48$，在 12 的下方與 12 的 1 對

齊寫 8，依次繼續 $48 \times 4 = 192$ 進行，每次向左移一位 ……；

(4) 將這些數字相加（如下圖）可得 076923 這組迴圈數。

$$
\begin{array}{r}
3 \\
12 \\
48 \\
192 \\
768 \\
3072 \\
12288 \\
+\quad 49152 \\
\hline
923076923
\end{array}
$$

<u>方法二（個位乘 4）：</u>

(1) 先確定迴圈節的末位是 3（從 1 開始，逐個找，先找到 3，$13 \times 3 = 39$）；

(2) 由 $A = 10x + y = 10(x + 4y) - 3 \times 13y$ 式確定倍數為 4；

(3) $3 \times 4 = 12$ 向左移一位寫 12，再 $2 \times 4 = 8$，在 12 的下方與 12 的 1 對齊寫 8，接下來應該是 $(8 + 1) \times 4 = 36$ 進行，再 $6 \times 4 = 24$，再 $(3 + 4) \times 4 = 28$，下一步是 $(2 + 8) \times 4 = 40$，……，依次繼續；

(4) 將這些數字相加（如下圖）可得 076923 這組迴圈數。

$$
\begin{array}{r}
3 \\
12 \\
8 \\
36 \\
24 \\
28 \\
40 \\
8 \\
+\quad 48 \\
\hline
923076923
\end{array}
$$

結論 5　把單位分數 $\frac{1}{q}$（q 為無 2、5 為其因數的數）表示成小數，必是一個純循環小數，迴圈節的末位元數字 p 是與分母 q 的個位之積為 9 的數字，其他各位（自後往前）依次是後一位元數字的個位與 $(pq+1)\frac{1}{10}$ 乘積（有進位元時應把進位元數字加進去），直到重新迴圈（不超過 q 位）為止。

四、變換「截去末位，並加上此末位數的 n 倍」與循環小數的聯繫

將「截去末位，並加上此末位數的 n 倍」當成變換，此變換必然迴圈，我們發現有如下規律，以具體例子說明：

「截去末位，並加上此末位數的 4 倍」作為變換（如果原來只有一位，就用它的 4 倍來替換），從 1 開始如下：$1 \to 4 \to 16 \to 25 \to 22 \to 10 \to 1$（六個迴圈數為 1、4、16、25、22、10）。它是由 $A = 10x + y = 10(x + 4y) - 39y = 10(x + 4y) - 3 \times 13y$ 的式子引出來的。我們再看 $\frac{1}{39}$ 的循環小數與各步除法的餘數：$\frac{1}{39} = \underset{1}{0}.\underset{10}{\dot{0}}\underset{22}{2}\underset{25}{5}\underset{16}{6}\underset{4}{4}\underset{1}{\dot{1}}$（商數下面的數是餘數），可以發現規律：

(1) 在變換中的六個數的個位從後往前（10 作為第一個）就是 $\frac{1}{39}$ 迴圈節（商數 $\frac{1}{39} \to 025641$），或在變換中的六個數的個位從前往後取（146520），然後調頭就是迴圈節；

(2) 變換中的六個數倒著看正是除法每步的餘數。

由此又得化分數為循環小數的新方法，舉例如下：

如何將 $\frac{1}{19}$ 化為小數？

(1) 公式 $A = 10x + y$ 變形為 $10(x + 2y) - 19y$；

(2) 從 1 開始作變換「截去末位，並加上此末位數的 2 倍」，得 $1 \to 2 \to 4 \to$

$8 \to 16 \to 13 \to 7 \to 14 \to 9 \to 18 \to 17 \to 15 \to 11 \to 3 \to 6 \to 12 \to 5 \to 10 \to 1$（迴圈開始）；

(3) 上面變換數字的末位元以此為 124863749875136250，倒著寫並附加小數可得 $\frac{1}{19} = 0.\dot{0}5263157894736842\dot{1}$。

重要的不僅是這種計算方法，而是這種知識聯繫，也許它還有更深刻的背景，許多問題還待繼續研究、證明。

指導教師電郵：luosh@hsfz.net.cn