三個數學教學反思案例

胡奕偉
麗水學院數學系

一般說來，數學教學反思，即對教學的反思性活動，是指教師借助於對自己教學實踐的行為研究，不斷反思自我對數學、學生學習數學的規律、數學教學目的、方法、手段以及經驗的認識，以發展自我職業水平，努力提高數學教學合理性的活動過程。

教師的理論知識可分為兩類：一類是「所倡導的理論」，這類知識是外顯的，教師容易意識到，容易報告出來，它更容易受到外界新資訊的影響而產生變化，但它並不能對教學行為產生直接的影響；另一類是「所採用的理論」，這類知識直接對教學行為產生重要影響，但它是內隱的，不容易被教師意識到，而且不容易受新資訊的影響而產生變化，而更多地受文化和習慣的影響。

教師所採用的理論與所倡導的理論之間往往存在一個落差。通過反思，使教師對教學中自己的活動以及學生的表現做認真的觀察和分析，並通過教師之間的相互觀察、討論、比較、修正，讓教師清楚地看到這個落差，以便在教學中採取相應的改進措施，「去粗取精，去僞存真，由此及彼，由表及裏。」不斷縮小所採用的理論與所倡導的理論的落差，並盡可能使它們趨於一致。

教師應當經常就已有數學教學實踐的各個方面向自己詰問：這是什麼？為什麼？怎麼辦？

以下結合個人的實踐，提出三個數學教學反思案例，請大家批評指正。

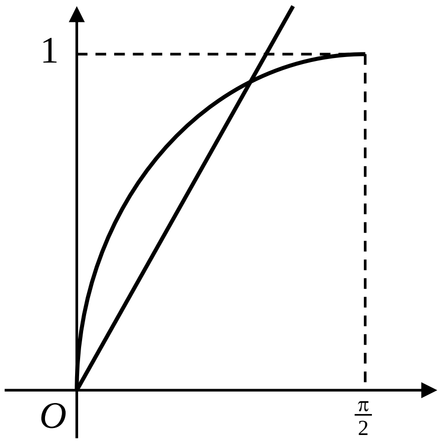
1、反正弦函數的圖像

在得出反正弦函數的概念以後，緊接的一個任務就是畫出反正弦函數的圖像。已知互為反函數的兩個函數圖像關於直線 $y = x$ 成軸對稱圖形，所以反正弦函數 $y = \arcsin x$，$x \in [-1, 1]$ 與正弦函數 $y = \sin x$，$x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的圖像關於直線 $y = x$ 成軸對稱圖形。作為準備，我們要在同一個坐標系內

畫出 $y = \sin x$，$x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 與 $y = x$ 的圖像。注意到它們都是奇函數，我們只需在同一個坐標系內畫出 $y = \sin x$，$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 與 $y = x$ 的圖像。

毫無疑問，$y = \sin x$，$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 的圖像與直線 $y = x$ 都是學生異常熟悉的。但是，且慢，熟悉 $y = \sin x$，$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 與 $y = x$ 的圖像，並不意味著必然熟悉將它們兩者畫在同一個坐標系裏的圖像。而後者是直接導致對於反正弦函數的圖像探究正確與否的關鍵，此時此刻，如何在同一個坐標系內正確畫出 $y = \sin x$，$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 與 $y = x$ 的圖像，已經成為每個學生非弄懂不可的一種迫切的需要。

我請每一個學生拿出一張紙，要求在同一個坐標系內畫出 $y = \sin x$，$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 與 $y = x$ 的圖像。結果表明，絕大數學生畫出的圖像是

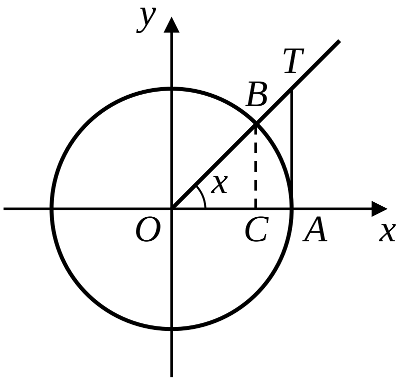


於是追問這樣畫圖的依據是什麼？經過一番思索、辨析，達成共識：函數 $y = f_1(x)$ 的圖像與 $y = f_2(x)$ 的圖像的交點的橫坐標就是方程 $f_1(x) = f_2(x)$ 的解；使 $y = f_1(x)$ 的圖像在 $y = f_2(x)$ 的圖像上方的 x 的區間就是不等式 $f_1(x) > f_2(x)$ 的解集。接著，可以列出一組 x 的特殊值，探究 $\sin x$ 與 x 之間的大小關係。

x	$\frac{\pi}{2} \approx 1.57$	$\frac{\pi}{3} \approx 1.05$	$\frac{\pi}{4} \approx 0.79$	$\frac{\pi}{6} \approx 0.52$	$\frac{\pi}{12} \approx 0.26$
$\sin x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \approx 0.25$
$\sin x < x$	✓	✓	✓	✓	✓
$\sin x = x$					
$\sin x > x$					

於是猜想：當 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 時，有 $\sin x < x$。

也許有學生忽然認出，這是著名不等式：當 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 時， $\sin x < x < \tan x$。不論有多少學生能夠認出，有必要複習相關證明。於是，教師問：你能證明這個不等式嗎？利用單位圓給出證明：



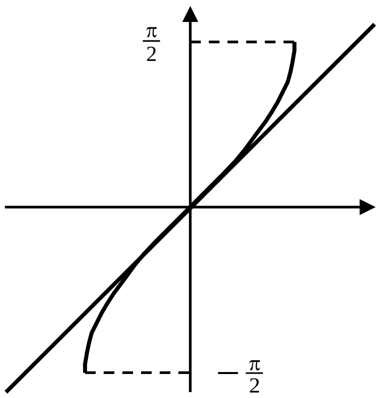
如圖 $S_{\Delta OAB} < S_{扇形\,OAB} < S_{\Delta OAT}$。

$\therefore \frac{1}{2} OA \cdot BC < \frac{1}{2}(OA \cdot x) \cdot OA < \frac{1}{2} OA \cdot AT$。

即 $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$。

$\therefore \sin x < x < \tan x$，$x \in (0, \frac{\pi}{2})$。

於是，在同一個坐標系內 $y = \sin x$，$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 與 $y = x$ 的圖像得到糾正，並進一步得出 $y = \arcsin x$，$x \in [-1, 1]$ 的圖像為



教學反思：我查閱有關資料，數學教師均沒有在所說的關鍵時刻，採用推遲判斷的策略或運用「時間等待理論」，明確提出上述思考性的問題：在同一坐標系裏 $y = \sin x$，$x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 與 $y = x$ 的圖像是什麼？他們是否高估了學生的「數學現實」，或者竟以教師自己的思維代替了學生的思維，忽視了對於「學生已經知道了什麼」的應有關注。

2、錯位相減法

課本示例如下：

對於等比數列 $\{a_n\}$，公比為 q，前 n 項的和 $s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$，$q\, s_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$。兩式相減，得：

$(1-q)s_n = a_1 - a_1 q^n$。若 $q = 1$，則顯然有 $s_n = a_1 + a_1 + \ldots + a_1 = n a_1$；若 $q \neq 1$，即 $s_n = \dfrac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a_1 - a_n q}{1-q}$ 。

教學反思：怎麼會想到在 $s_n = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1}$ 兩邊同乘以 q？

這裏提供兩種思路：

(1) 回到等比數列的定義去

若 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$（$n \geq 2$）= 常數 q，則稱｛a_n｝為等比數列。

$\therefore$ $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \ldots = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q$ 。運用合比定理，得 $\dfrac{a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}} = q$ ，即 $\dfrac{s_n - a_1}{s_n - a_n} = q$ 。$\therefore$ $s_n - a_1 = q(s_n - a_n)$，$s_n - q s_n = a_1 - q a_n$。若 $q \neq 1$，則 $s_n = \dfrac{a_1 - q a_n}{1-q} = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ ；若 $q = 1$，則 $s_n = n a_1$。

這裏的 $s_n - q s_n = a_1 - q a_n$ 啟發我們在 $s_n = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1}$ 的兩邊都乘以 q，採用錯位相減法。

(2) 以數列的前 n 項和的意義為出發點

$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1 + q(a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-2}) = a_1 + q s_{n-1}$。

同時，對於數列｛a_n｝有 $s_n = s_{n-1} + a_n$（$n \geq 2$）。$\therefore$ $s_n = a_1 + q(s_n - a_n)$。$\therefore$ $s_n - q s_n = a_1 - q a_n$。若 $q \neq 1$，則 $s_n = \dfrac{a_1 - q a_n}{1-q} = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ ；若 $q = 1$，則 $s_n = n a_1$。

同理，這裏的 $s_n - q s_n = a_1 - q a_n$ 啟發我們在 $s_n = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1}$ 的兩邊都乘以 q，採用錯位相減法。順便提及，

(a) 這裏講授的先後順序，不宜更換，以求曲徑通幽，或者說，不讓學生親身經歷「山窮水複疑無路」的困境，學生就難以產生「柳暗花明又一村」的喜悅。

(b) 或許有人說，乾脆避開錯位相減法不講了事。這樣的處理，固然可以暫時解決眼前的問題，但是錯位相減法作為一個知識性目標，避開它，無形之中就降低了要求，同時又錯失一個可以提高的機會。

事實上，$s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}$ 中的 s_n 可以看成常數列 $\{ a_1 \}$ 與等比數列 $\{ q^{n-1} \}$ 對應項乘積的和。將常數列 $\{ a_1 \}$ 推廣到等差數列 $\{ a_n \}$，等比數列 $\{ q^{n-1} \}$ 推廣到等比數列 $\{ b_n \}$，錯位相減法就獲得一個更大的應用空間：

$$\begin{aligned} s_n &= a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \\ &= a_1b_1 + (a_1 + d)b_1q + \ldots + [a_1 + (n-2)d]b_1q^{n-2} + [a_1 + (n-1)d]b_1q^{n-1} \\ q\,s_n &= a_1b_1q + (a_1 + d)b_1q^2 + \ldots + [a_1 + (n-2)d]b_1q^{n-1} + [a_1 + (n-1)d]b_1q^{n} \end{aligned}$$

兩邊相減，即得 $(1-q)s_n = a_1b_1 + db_1q + \ldots + db_1q - [a_1 + (n-1)d]b_1q^n$。

若 $q \neq 1$，則 $s_n = \dfrac{a_1b_1 + (n-1)b_1qd - [a_1 + (n-1)d]b_1q^n}{1-q}$；若 $q = 1$，則 $s_n = n\,a_1b_1 + \dfrac{n(n-1)b_1d}{2}$。

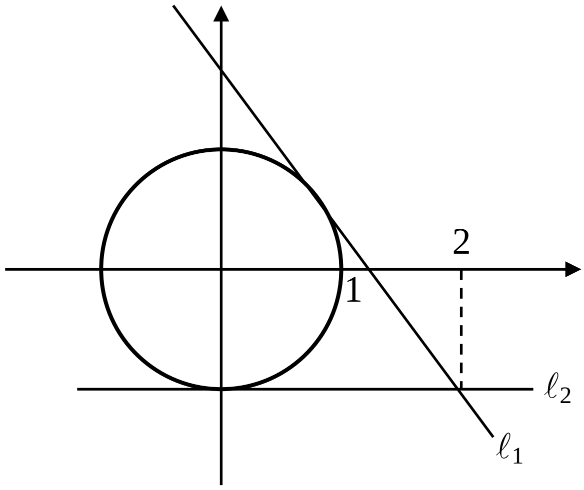
3、求出 $y = \dfrac{\sin x + 1}{\cos x - 2}$ 的最值

有文獻指出，本題常被用作複習資料和教師作為使用數形結合解題的範例。忘掉了數形結合就無從下手。某大學數學系 96 級（三年級）79 人的測試結果為：

被試者 使用方法	數形結合	判別式	萬能公式	沒做出
佔被試者 的百分比	1 %	5 %	9 %	85 %

解法 1（構造圖形法或數形結合）：

將 $y = \dfrac{\sin x + 1}{\cos x - 2}$ 看作為連接動點 $(\cos x , \sin x)$ 與定點 $(2 , -1)$ 的直線的斜率。構造圖形如下：



$\therefore\ k_{\ell_1} \le y \le k_{\ell_2}$ 。

設過點 (2 , –1) 的單位圓 $x^2 + y^2 = 1$ 的切線方程為 $y + 1 = k(x - 2)$，即 $kx - y - 2k - 1 = 0$。圓心 (0 , 0) 到該直線的距離為 1，即 $\dfrac{|-2k-1|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$，$4k^2 + 4k + 1 = k^2 + 1$，$3k^2 + 4k = 0$，$\therefore\ k_{\ell_1} = -\dfrac{4}{3}$ ，$k_{\ell_2} = 0$ 。

$\therefore\ -\dfrac{4}{3} \le y \le 0$ 。

解法 2（萬能公式）：

設 $\tan\dfrac{x}{2} = t$，$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ ，$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ 。

$$y = \frac{\sin x + 1}{\cos x - 2} = \frac{\dfrac{2t}{1+t^2} + 1}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2} - 2} = \frac{2t + t^2 + 1}{1 - t^2 - 2 - 2t} = \frac{t^2 + 2t + 1}{-3t^2 - 1} \text{ 。}$$

$\because -3t^2 - 1 \le -1$，$-3t^2 - 1 \ne 0$，

$\therefore -3t^2y - y = t^2 + 2t + 1$，$(3y + 1)\,t^2 + 2t + y + 1 = 0$，$t \in \mathbf{R}$。

若 $3y + 1 = 0$，則 $y = -\dfrac{1}{3}$ ，$t = -\dfrac{1}{3}$ ；若 $3y + 1 \ne 0$，即 $y \ne -\dfrac{1}{3}$ ，則 $\Delta_t \ge 0$，$4 - 4(3y + 1)(y + 1) \ge 0$，$\therefore\ -\dfrac{4}{3} \le y < -\dfrac{1}{3}$ 或 $-\dfrac{1}{3} < y \le 0$ 。綜合得 $-\dfrac{4}{3} \le y \le 0$ 。

解法 3（利用 $|a\sin x+b\cos x|\le\sqrt{a^2+b^2}$）：

$y=\dfrac{\sin x+1}{\cos x-2}$。若 $\cos x-2=0$，則 $\cos x=2$，但 $-1\le\cos x\le 1$，矛盾。

$\therefore \cos x-2\neq 0$，$y\cos x-2y=\sin x+1$，$x\in\mathbf{R}$。

$\therefore \sin x-y\cos x=-2y-1$。

$\because |\sin x-y\cos x|\le\sqrt{1+y^2}$，$|-2y-1|\le\sqrt{1+y^2}$，

$\therefore 4y^2+4y+1\le 1+y^2$，$3y^2+4y\le 0$，$\therefore -\dfrac{4}{3}\le y\le 0$。

解法 4（利用 $\sin^2x+\cos^2x=1$）：

不防設 $\cos x=t$。因為 $\sin^2x+\cos^2x=1$，則 $\sin^2x=1-\cos^2x=1-t^2$。而 $\cos x-2\neq 0$，$\therefore y(\cos x-2)=\sin x+1$，$y(\cos x-2)-1=\sin x$。

$\therefore [y(\cos x-2)-1]^2=\sin^2x$，即 $[y(t-2)-1]^2=1-t^2$。

$\therefore (y^2+1)t^2-(4y^2+2y)t+4y^2+4y=0$。

$\therefore \Delta_t\ge 0$，即 $[-(4y^2+2y)]^2-4(y^2+1)(4y^2+4y)\ge 0$。

$\therefore y(3y+4)\le 0$，$\therefore -\dfrac{4}{3}\le y\le 0$。

教學反思（1）：解法 3 是怎樣想到的？

把 $a\sin x+b\cos x$ 化為一個角的一個三角函數的形式，乃是三角函數部分的一個教學要點。這裏的目標定向為：$a\sin x+b\cos x=$
$\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x)$
$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\varphi+x)\in[-\sqrt{a^2+b^2},\ \sqrt{a^2+b^2}]$。

注意到 $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$，$\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$，恰恰好可以聯想，且完全符合三角函數的定義，因此將點（a, b）看作所引進的輔助角的終邊上

的一點，根據三角函數的定義有 $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

φ 是第幾象限的角，由終邊的點 (a, b) 的符號完全確定。由於 $-1 \le \sin(\varphi + x) \le 1$，所以 $-\sqrt{a^2+b^2} \le \sqrt{a^2+b^2}\sin(\varphi + x) \le \sqrt{a^2+b^2}$。即 $-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin x + b\cos x \le \sqrt{a^2+b^2}$，$|a\sin x + b\cos x| \le \sqrt{a^2+b^2}$。

教學反思（2）：以上 4 個解法，哪一個最優？

數學知識的運用、靈活運用須與學生的知識存儲、個性偏好相適應。在這個意義上說，解法的優劣最好由學生本人來判斷，教師不能以自己的偏好強分甲乙。至少，在學習解析幾何之前，解法 3 是最優解。

奧蘇伯爾說：「如果我不得不將教育心理學還原為一條原理，我將會說，影響學習的最重要因素是學生已經知道了什麼，我們應當根據學生原有的知識狀況去進行教學。」

如可補充，我們做數學教育研究也應作如是觀。

<u>參考文獻</u>

馬復（2000）。教學反思 —— 從經驗型教學走向合理性教學。中學教學月刊，2000，9。

張建偉（1997）。反思 —— 改進教師教學新思路。北京師範大學學報（社會科學版），1997，4。

鄭毓信（1994）。《問題解決與數學教育》。江蘇教育出版社。

塗榮豹（2006）。談提高對數學教學的認識 —— 兼評兩節數學課。中學數學教學參考，2006，1 – 2。

吳躍忠（1999）。數學學習中的遺忘及其啟示 —— 關於“三基”一次測試。中學數學教學參考，1999，8。

陳瓊、翁凱慶（2002）。試論教學學習中的理解學習。教學教育學報，2002，3。

作者電郵：huyiwei@zj.com