式子「$x = 11 + 5$」是一道方程嗎？

黃家樂
香港大學教育學院

李玉潔
瑪利諾修院學校（小學部）

引言

黃毅英教授（2006）從學生對老師的求問「用『A 簿』還是用『B 簿』」談起，討論老師對從事師訓者（其實也包括在上者，如課程發展署的官員）的各種問題。筆者最近也接到一位老師的這個問題：「式子『$x = 11 + 5$』是一道方程嗎？」本文嘗試回應這個問題，從中筆者十分認同黃毅英（2006）所指，我們從事教育工作者，不宜單單存著一種「向權威求取標準答案」的態度，應以該問題作為「學理探究和專業討論」的起點。就以上問題而言，假若讀者以為只是數學定義問題，又或者以為可以從一位數學家或數學教育家口中得出一個標準答案，筆者就更希望能和讀者分享這個問題如何引發出關於方程在小學的教學上一些基本的考慮。

香港小學數學課程中，「代數」是在第二學習階段（小四至小六年級）的一個學習範疇，有別於其他「數」、「度量」、「圖形與空間」及「數據處理」四個範疇，雖然在課程中所佔比重很少，課程文件建議時間上佔第二學習階段的 7%，而相對於整個小學數學課程，則只有 3%；但這樣將「代數」作為一個獨立範疇的安排，就更突顯出「代數」跟「數」（其中以四則運算為主要內容）有着一些根本的不同[1]。粗略而言，這個範疇在小學涵蓋的學習重點有二，其一是以符號或英文字母代表數，其二是簡易方程的解；期望學生能用簡易方程解答應用題（課程發展議會，2000）。假如學生寫了一個式子「$x = 11 + 5$」，它是一道方程嗎？

方程的定義

老師的提問，直接問及「$x = 11 + 5$」這個式子。設想我們（參與討論

1 在中學的數學課程裡，「數」和「代數」是綜合在同一學習範疇的，這個「數與代數範疇」也正好反映了中學的數學課程對學習代數方面的基本設想。

者）經已清楚一些提出這個問題時的基本假設，即這個式子中所包含各個元件的一般意義，例如：x 是一未知數。如此設想下，我們不難決定式子「$x = 11 + 5$」正是一般數學定義下的「方程」，因為它有著一未知數 x（或稱未知元），而且它以一等式的形式表達這個未知數與其他數量的關係。再多一點就著「方程」的數學特性去設想這個式子，我們將更難拒絕接受式子「$x = 11 + 5$」是一「方程」的這個事實。須知道我們在解方程的時候，每一步所得的式子，邏輯上其實是跟前一步的式子等價（equivalent）的[2]。換而言之，解方程的過程中每一行式子其實都是方程。一如以下例子，倘若我們要解方程「$x = 11 + 5$」，那麼邏輯上必定要承認「$x = 11 + 5$」及「$x = 16$」都是跟原擬方程「$x - 5 = 11$」等價的方程，不然的話，我們又怎能宣稱最後一行式子是原擬方程「$x - 5 = 11$」的解呢？

例

$$\begin{aligned} x - 5 &= 11 \\ x &= 11 + 5 \\ x &= 16 \end{aligned}$$

這樣說來，「$x = 11 + 5$」不就是明明白白的一道方程，又怎會引起任何疑惑呢？值得深思的是，為何老師會提出「式子『$x = 11 + 5$』是一道方程嗎？」這個問題？他們所設想的處境是怎樣的呢？他們所關注的又是甚麼呢？

方程在小學課堂中的意義

學習方程時，小學生須用簡易方程解答應用題，例如：

> 瑩瑩早餐時吃了 5 塊曲奇餅，盒裡還剩 11 塊。早餐前盒裡原有曲奇餅多少塊？

若是測考題目，還會註明「用解方程的方法，找出答案」一類的字眼，藉此要求學生設盒裡原有曲奇餅 x 塊，然後列寫方程「$x - 5 = 11$」，從而求解得盒裡原有曲奇餅 16 塊。可是，有一些學生會以「$x = 11 + 5$」開始，以

2 筆者還記得讀書時候（想是初中吧）某位數學老師的要求，就是要我們在解方程的每一步加上等價的數學符號「⇔」，例如：

$$\begin{aligned} & x - 5 = 11 \\ \Leftrightarrow\quad & x = 11 + 5 \\ \Leftrightarrow\quad & x = 16 \end{aligned}$$

求得「$x = 16$」。

承上文，既然「$x = 11 + 5$」是一道方程，學生以「$x = 11 + 5$」為方程開始而求解得「$x = 16$」，理應符合題目要求。但事實卻是，不少老師都不會完全接受學生以「$x = 11 + 5$」作為這道應用題的方程列式作答，至少不會給予滿分。那又為甚麼呢？筆者也相信這點在評分上的疑慮正是老師提問「式子『$x = 11 + 5$』是一道方程嗎？」時的困惑所在。

我們設想「$x = 11 + 5$」可以作為應用題的方程列式作答，那麼學生在初小階段學習的四則計算又豈不是方程嗎？例如，小一課程便有類似的應用題：

小俊有 3 元，小芬與小俊共有 10 元。小芬有多少元？

老師引導學生設想「10 – 3 = ?」，接著得出「? = 7」，然後答題：「小芬有 7 元。」

把問號（?）視為未知數放在等式的一邊，實不難得出一道符合上文所描繪的數學「方程」。但這又似乎不太對勁，我們總不會認為這種包含問號的式子及背後的想法對初小學生是代數的概念吧！至少老師在初小階段如此教授時也不會認為自己在教授代數吧！正好相反，我們透過這個例子，或可看到初學代數的高小學生對「$x = 11 + 5$」的理解其實跟他們對「10 – 3 = ?」的看法沒有兩樣，基本上都是利用四則計算的方法去解決問題，只是利用「x」去替代「?」—— 那個有待尋找的答案。事實上，不少研究經已指出，式子如「10 – 3 = ?」在小學生的數學學習中是一個計算答案的指令，式子中的等號（=）就是要求著一個計算的動作，這是算術（arithmetic），誠如 Kieran（1992）所言，算術的目的是找出答案。Nickson（2000）在綜合了不少研究後指出，小學生能夠利用他們直觀的方法去解決不少算術問題，旨在計算答案，跟代數所強調的一些關鍵概念根本沾不上邊。如此說來，式子「$x = 11 + 5$」實在不應該是學生運用簡易方程去求得以上例子盒裡原有曲奇餅數量的手法，而問題卻不是式子「$x = 11 + 5$」是否方程的這樣一個數學定義問題。倘若老師不能看透這個分別，便沒法完全理解何以「代數」和「數」在學習上是截然不同的範疇；而在教學上亦多不能突顯「代數」與一般四則運算的基本分別，即或在學生列寫的式子「$x = 11 + 5$」上不予評分，也未必能幫助學生瞭解箇中原因。如上文所述，即使數學上

肯定了式子「$x = 11 + 5$」是一道方程，也只會令老師更加大惑不解。

關鍵在哪裡？

在代數的教學上，尤其是方程的學習上，關鍵在哪裡呢？我們不妨仔細看看以下一個教科書的例子，從中突出一些關鍵的代數概念，進而考慮教授方程時一些值得注意的地方。以下例子引自《新紀元小學數學，5C 冊》（馮振業等，2002，頁 36）：

> 爸爸上月的薪金是 20 000 元，本月加薪 x 元，爸爸本月的薪金是 $(20\ 000 + x)$ 元。
>
> $20\ 000 + x$ 是一條代數式，其中 x 是一個代數符號，代表一個未知數。
>
> 如果爸爸本月的薪金是 22 000 元，我們可將薪金的實際數值（即 22 000）和代數式（即 $20\ 000 + x$）用一個等號連起來：
>
> $$20\ 000 + x = 22\ 000$$
>
> 這條等式就稱為方程。

仔細閱讀作者們引入「方程的概念」的這個例子，我們可歸納出方程這個課題的學習重點，正是利用代數符號以代表一個未知數，從而按題意擬設的情境去逐步建立數量之間的關係。這正是學習代數的基本意義：「代數是數量關係的學習」（鄭振初，2001，頁 71），這一點已有不少學者明確地討論過（Kieran，1989；Nickson，2000），在此不再詳細表述。縱然一特定事態中有著未可確知的數量，我們還是可以使用簡單的代數符號語言來描述該事態中各數量之間的關係；而更重要的是，利用一個代數符號「x」來代表一個未知數，關鍵不再是將該未可確知的數量單單看為最終要找的答案（求 x），而是藉着「x」來建立起該事態中各數量之間的等式關係。假若學生開始時以 $x = 22\ 000 - 20\ 000$ 作為一道方程去表達或解答上述例子，雖不能說是錯謬，但不應是理想的表達方法，因為這個題解正顯示學生依然停留於以減法去計算出所需答案的想法，很可能並未完全掌握這個代數課題的學習重點。故此，若學生以 $x = 22\ 000 - 20\ 000$ 作答，在測考中被扣分，教師應清楚指出學生未能正確利用方程去描述題目擬設的情境中各數量之間的關係，而非針對 $x = 22\ 000 - 20\ 000$ 是否一道方程而扣分。

另外，以上例子的解說方式正好展示了數學教學中（尤其是小學以至初中階段）的數學，並不單以定義出發，而是意義的建構，在較容易明白或較容易接受的具體細節上，逐步建立出一個較抽象（包含多一點數學符號或名詞）的概念。須知道「關係」（方程作為一等式關係）這一概念並不容易 —— 尤其是學生學了不少算術求答案的時候。上文經已提到，學生在慣常使用的算術方法中，只是將等號理解為計算答案的要求；有經驗的老師不難發現，學生不時將一連串明顯不相等的數式用等號連繫起來，皆因學生只想著一個個幫助他們算出最後答案的計算步驟。明顯地，學生存著這樣的理解時，式子「$x = 22\,000 - 20\,000$」的計算意義就當然比起方程「$20\,000 + x = 22\,000$」所表達一個關係的意義更容易接受。

鄭振初（2001）也有討論代數的教學，他建議藉著「具有現實意義的例子」進行方程的教學，學生固然可以直接地以算術的方法寫出一道算式來找出正確答案，但老師還是須要引導「學生寫出原先的等式」（頁 72）。甚麼是「原先的等式」？細心觀察鄭氏的例子，如「眼鏡連盒」共重 90 克（其中眼鏡重量為未知數、而盒的重量為已知的 50 克），就是要在擬設例子或問題時，要設想未知數的量跟已知量的結合，是很自然地「具有現實意義」。又例如：

> 小健用了 880 元買了一部最新的遊戲機。爸爸說：「這個價錢是我送給你第一部遊戲機的 4 倍，十分昂貴呢！」用解方程的方法，求爸爸買給小健第一部遊戲機的價錢。（摘自 2006 年全港性系統評估數學科小學六年級分卷一，題 42）

題目描繪的情境中，嘗試以「這個價錢是我送給你第一部遊戲機的 4 倍」引導學生直接去將 880 元「這個價錢」等同於「第一部遊戲機的價錢」（某數）的 4 倍。如是觀之，教師在擬題（尤其是例題）時可多加注意題目描繪的情境是否具有現實意義，而題意又能否逐步建立數量之間的關係，好讓學生學習利用簡單的代數符號語言來描述該事態中各數量之間的關係。

結語

代數是數量關係的一種學習，學生學習運用方程去解答應用題，也該

以此為其中一主要目的。但初學階段所能應付的問題，自然較為簡單，學生既慣於四則計算，用算術方法去求得答案就往往比運用方程方便得多，學生很難瞭解好端端的一道減數題怎麼要來這個「設」的方法。（且又要多寫幾個字！）這點已經不是單單因為代數符號的抽象性質所構成的障礙，而是在等號的基本意義上須要有所突破，老師一方面要瞭解學生的困惑，逐步引導學生將焦點從找答案轉向理解數量關係，另一方面也要在擬設例題解說時找緊課題的核心，突出代數的學習重點。

參考文獻

馮振業、李詩雅、王倩婷（2002）。《新紀元小學數學，5C 冊》。香港：牛津大學出版社。

黃毅英（2006）。「老師，用『A 簿』還是用『B 簿』？」。《數學教育》23 期，27 – 36。

課程發展議會（2000）。數學教育學習領域：數學課程指引（小一至小六）。香港：課程發展議會。

鄭振初（2001）。小學數學課程與教學。香港：香港教育學院。

Kieran, C. (1989). The early language of algebra: A structural perspective. In Wagner, S. & Kieran, C. (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 159 – 196). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics / Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In Grouws, D.A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.390 – 419). New York: Macmillan.

Nickson, M. (2000). *Teaching and Learning Mathematics: A Teacher's Guide to Recent Research and Its Application* (pp.109 – 146). London: Cassell.

首作者電郵：klwong3@hkucc.hku.hk