新發現一個幾何定理

于志洪
江蘇省泰州實驗學校

最近在講授九年義務教育三年制初級中學教科書《幾何》第三冊第 79 頁例 2 後，我應用例 2「三角形兩邊之積等於三邊上的高與外接圓直徑之積」及其引申「圓上任意一點到某切線相切點的距離等於該點到切線的距離與圓直徑的比例中項」，發現了一個新的幾何定理。現提出來，其目的在於拋磚引玉，不足之處，請讀者指正。

一、引理

如圖一，已知 P 是 $\odot O$ 上的一點，AB 是弦，$PC \perp AB$ 於 C，PD 垂直過 A 點的切線於 D，若 d 為 $\odot O$ 的直徑，求證：$AC = \dfrac{PA}{d} \cdot \sqrt{d^2 - PB^2}$，$AD = \dfrac{PA}{d} \cdot \sqrt{d^2 - PA^2}$。

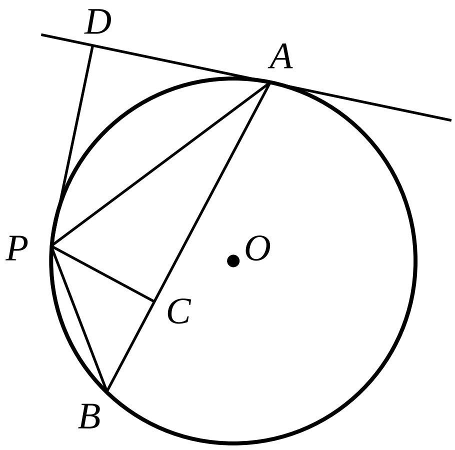

圖　一

證明　令 $\angle DAP = \angle B = \alpha$，則 $PC = PB \sin \alpha$，$PD = PA \sin \alpha$。又由正弦定理知 $\sin \alpha = \dfrac{PA}{d}$，故 $PC = \dfrac{PA \cdot PB}{d}$，$PD = \dfrac{PA^2}{d}$。因此由勾股定理得

$$AC = \sqrt{PA^2 - PC^2} = \sqrt{PA^2 - (\frac{PA \cdot PB}{d})^2} = \frac{PA}{d} \cdot \sqrt{d^2 - PB^2} ,$$

$$AD = \sqrt{PA^2 - PD^2} = \sqrt{PA^2 - (\frac{PA^2}{d})^2} = \frac{PA}{d} \cdot \sqrt{d^2 - PA^2} 。$$

二、新定理 1

三角形外接圓上任一點在三邊上的射影至三頂點的距離之積，等於該點在過三頂點所作切線上的射影至三頂點的距離之積。

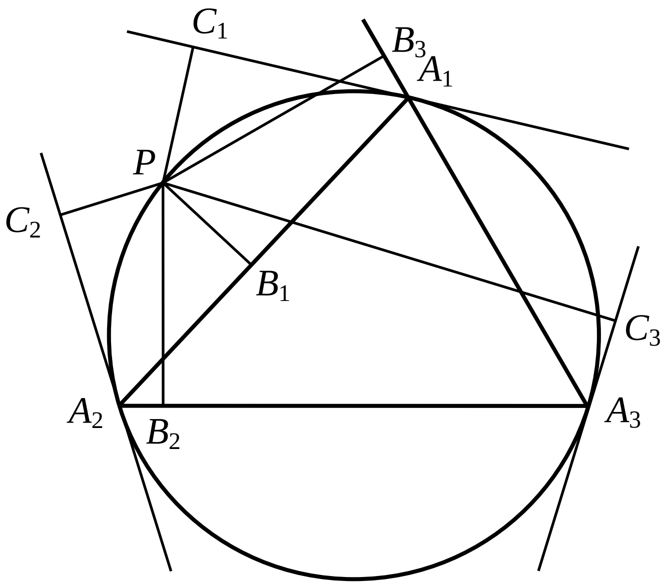

圖　二

證明　如圖二，P 點是 $\Delta A_1A_2A_3$ 外接圓上任一點。設外接圓的直徑為 d，$PA_i = a_i$，B_i、C_i 均為垂足（$i = 1 , 2 , 3$），則由引理得

$$A_1B_1 = \frac{a_1}{d}\cdot\sqrt{d^2 - a_2^{\ 2}}\ ，A_2B_2 = \frac{a_2}{d}\cdot\sqrt{d^2 - a_3^{\ 2}}\ ，A_3B_3 = \frac{a_3}{d}\cdot\sqrt{d^2 - a_1^{\ 2}}\ 。$$

$$A_1C_1 = \frac{a_1}{d}\cdot\sqrt{d^2 - a_1^{\ 2}}\ ，A_2C_2 = \frac{a_2}{d}\cdot\sqrt{d^2 - a_2^{\ 2}}\ ，A_3C_3 = \frac{a_3}{d}\cdot\sqrt{d^2 - a_3^{\ 2}}\ 。$$

$$\therefore\quad \prod_{i=1}^{3} A_iB_i = A_1B_1\cdot A_2B_2\cdot A_3B_3 = \frac{a_1a_2a_3}{d^3}\sqrt{(d^2-a_1^{\ 2})(d^2-a_2^{\ 2})(d^2-a_3^{\ 2})}$$

$$\therefore\quad \prod_{i=1}^{3} A_iC_i = A_1C_1\cdot A_2C_2\cdot A_3C_3 = \frac{a_1a_2a_3}{d^3}\sqrt{(d^2-a_1^{\ 2})(d^2-a_2^{\ 2})(d^2-a_3^{\ 2})}$$

$$\therefore\quad \prod_{i=1}^{3} A_iB_i = \prod_{i=1}^{3} A_iC_i$$

顯然當 $P \in A_i$ 時，其積為零，定理仍成立。

三、新定理 2

圓內接 n 邊形的外接圓上任一點在 n 條邊上的射影至三頂點的距離之積，等於該點在過 n 個頂點所作切線上的射影至 n 個頂點的距離之積。

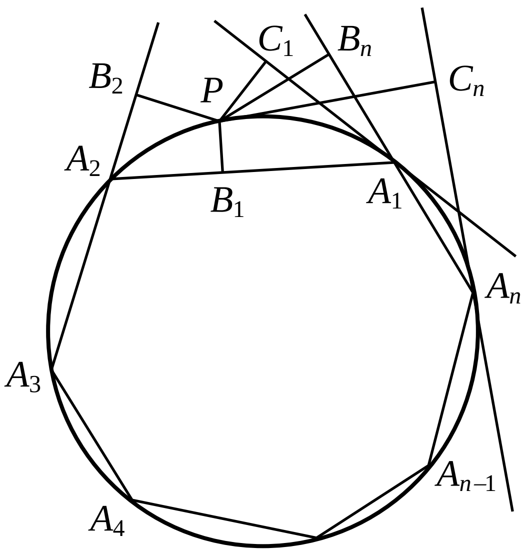

圖　三

證明　如圖三，P 點是 $A_1A_2\cdots A_n$ 外接圓上任一點。B_i、C_i 均為垂足，$PA_i = a_i$（$i = 1 , 2 , \ldots , n$）。設外接圓的直徑為 d，則仿上易證得

$$\therefore \quad \prod_{i=1}^{n} A_iB_i = \prod_{i=1}^{n} A_iC_i = \frac{a_1a_2\cdots a_n}{d^n}\sqrt{(d^2-a_1{}^2)(d^2-a_2{}^2)\cdots(d^2-a_n{}^2)}$$

顯然當 $P \in A_i$ 時，其積為零，定理仍成立。

參考文獻

梁紹鴻（1978）。《初等數學複習及研究》。人民教育出版社，65 頁。

于志洪（1992）。關於圓內接多邊形的一個新定理。載楊世明（編）。《中國初等數學研究文集》。河南教育出版社，686 – 688 頁。

于志洪（1990）。極坐標法證明一定理及其推廣。數學通報，1990，2。

于志洪（1991）。發現了幾個新幾何定理。中小學數學（北京），1991，3。

于志洪（1991）。一個新發現的幾何定理。中學數學（蘇州），1981，1。

于志洪（1993）。圓的點弦（切）距公式及其應用。寧夏大學學報（自然科學版），第 14 卷，1993，4。

作者地址：江蘇省泰州實驗學校（225300）