阿波羅尼奥斯問題的解答（下）

梁子傑
循道中學

阿波羅尼奥斯問題是：「給出三個固定圓，找與這三個圓都相切的圓。」而問題中的三個圓亦可以退化成點或直線，因此除了原本的「圓、圓、圓」問題外，亦可演變成另外的 9 個問題。

在上一期中，經已討論了「點、點、點」、「點、點、圓」、「點、圓、圓」和「圓、圓、圓」的 4 個情況，現在介紹其餘 6 個問題的解答。

點、點、線

分析

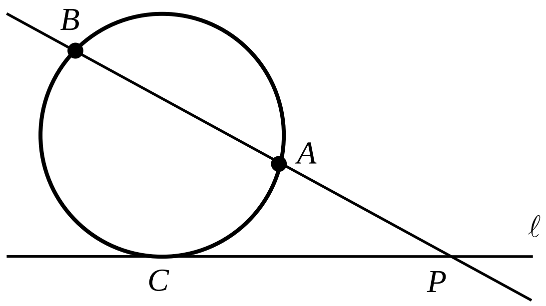


圖 一

圖一中，A、B 為已知點，ℓ 為已知直線。現要作圓，使它通過 A 和 B 並且與 ℓ 相切。上期經已提到，作圓最基本的條件就是要知道圓心位置和半徑大小；又或者可以確定圓上 3 點的位置，從而利用上期介紹「點、點、點」的方法作圖。現在既然經已知道圓上 A、B 兩點的位置，那麼下一步自然是找出第三點的位置。

設圓與直線的交點為 C，ℓ 與 AB 相交於 P。很明顯，若要作出所需的圓，便要確立 C 的位置了。

留意 A、B 和 ℓ 都是已知的，由此可以確定 P 的位置。因為 ℓ 是圓的切線，並相切於 C，所以 $PA \cdot PB = PC^2$。由於 PA 和 PB 是可確定的，因此祇要能構作出一條線段，它的長度等於 $\sqrt{PA \cdot PB}$，那麼便可以確定 C。問

題是：如何能夠作出一條線段，它的長度等於兩已知線段長度之積的平方根呢？

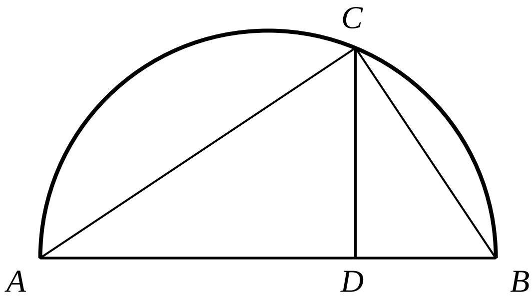


圖　二

在圖二中，ACB 為一半圓，D 為直徑 AB 上一點，使 $CD \perp AB$。由於 $\angle ACB = 90°$，因此易證 $\Delta ADC \sim \Delta CDB$，即 $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$ 或 $AD \cdot BD = CD^2$。換言之，$CD = \sqrt{AD \cdot BD}$，即圖二提供了一個將兩線段之積開方的方法。將圖一和圖二結合，便可以完成「點、點、線」的作圖。

作圖步驟

已知 A、B 兩點及直線 ℓ。

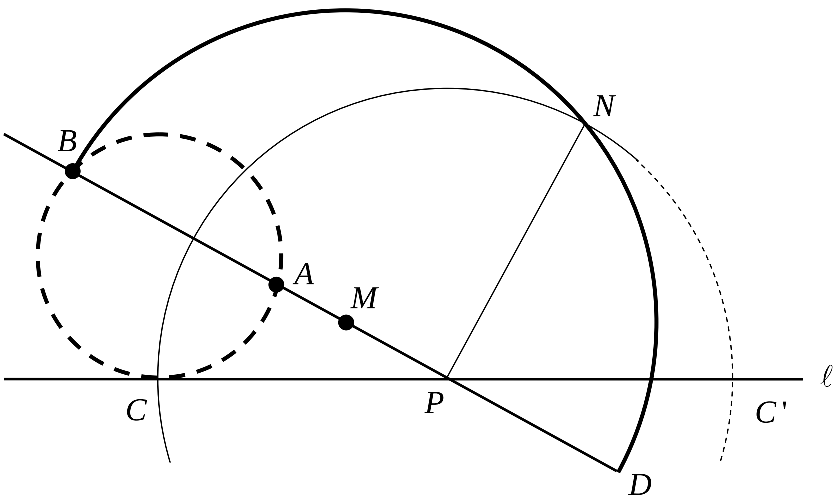


圖　三

1. 連結並延長 AB。稱 AB 與 ℓ 的交點為 P。
2. 延長 AP 至 D，使 $AP = PD$。
3. 作線段 BD 的中點，並稱之為 M。
4. 以 M 為圓心，MB 為半徑作半圓。

5. 通過 P 作直線垂直於 BD，並稱垂直線與半圓的交點為 N。
6. 以 P 為圓心，PN 為半徑作弧線，使它交 ℓ 於 C。
7. 按「點、點、點」的步驟作圓 ABC。這就是所求作的圓。

補充說明

圖三中，弧線 CN 與 ℓ 共有兩個交點。若稱另一交點為 C'，則按「點、點、點」步驟所作的圓 ABC' 亦是這情況的一個解。換言之，「點、點、線」共有 2 個解。

點、線、線

分析

圖四中，A 為已知點，ℓ_1 和 ℓ_2 為已知直線。現要作圓 C_1，使它通過 A 並且與 ℓ_1 和 ℓ_2 相切。設 C_1 的圓心為 O，ℓ_1 和 ℓ_2 的交點為 P。連結 PO，不難證明 PO 是 ℓ_1 和 ℓ_2 夾角的角平分線，由此可以看出，整個圖是對稱於 PO 的。因此若 A 為 C_1 上的一點，則在 C_1 上亦應有另一點 B，使 A、B 兩點對稱於 PO。由於確定了圓上兩點 A 和 B 的位置，再加上直線 ℓ_1 或 ℓ_2，因此可以利用前面「點、點、線」的方法來作 C_1。

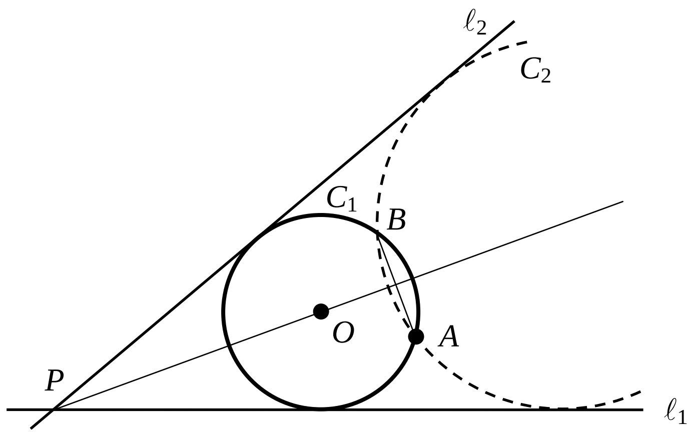


圖　四

作圖步驟

已知 A 點及直線 ℓ_1 和 ℓ_2。設 P 為 ℓ_1 和 ℓ_2 的交點。

1. 作 ℓ_1 和 ℓ_2 夾角的角平分線（以尺規畫角平分線的方法則留給讀者研究）。
2. 將角平分線設定成反射對稱軸，將 A 反射至對稱軸的另一側，成為 B 點。

3. 按前面「點、點、線」的步驟作通過 A、B 兩點，並且與 ℓ_1 相切的圓。這就是所求作的圓。

補充說明

1. 因為「點、點、線」有 2 個解，所以此題亦應有 2 個解。而另一解為圖四中的 C_2。

2. 若 ℓ_1 和 ℓ_2 不相交，即 $\ell_1 // \ell_2$，則作一直線等距於 ℓ_1 和 ℓ_2，以此代替上述步驟中的角平分線。

3. 若 A 剛好位於角平分線上，則通過 A 作一直線 ℓ_3 垂直於角平分線，然後按下面將要介紹的「線、線、線」作圖步驟，作與 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3 相切的圓。

線、線、線

分析及作圖

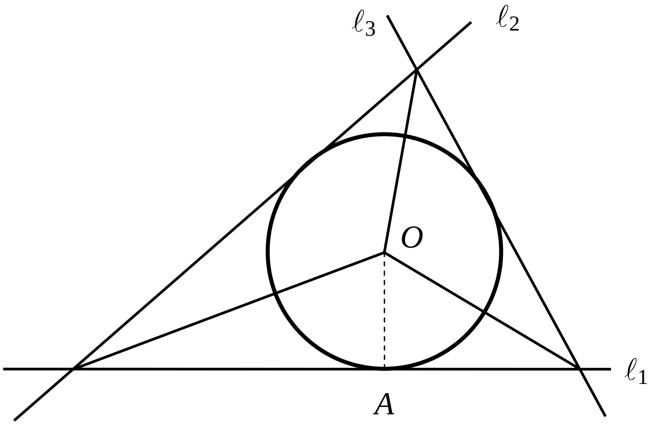


圖　五

圖五中，ℓ_1、ℓ_2 和 ℓ_3 為已知直線。現要作圓，使它與 ℓ_1、ℓ_2 和 ℓ_3 相切。由前面的討論可知，每兩條直線間夾角的角平分線必定通過圓的圓心 O，所以圓心的置位可以通過兩條角平分線的交點來確定。另外，若由 O 向其中一直線作垂直線，交該直線於 A，則 OA 便是圓的半徑。以 O 為圓心，OA 為半徑作圓，這就是所求作的圓。

補充說明

此題應有 4 個解。詳見圖六中的 4 個圓。原因留給讀者探究。

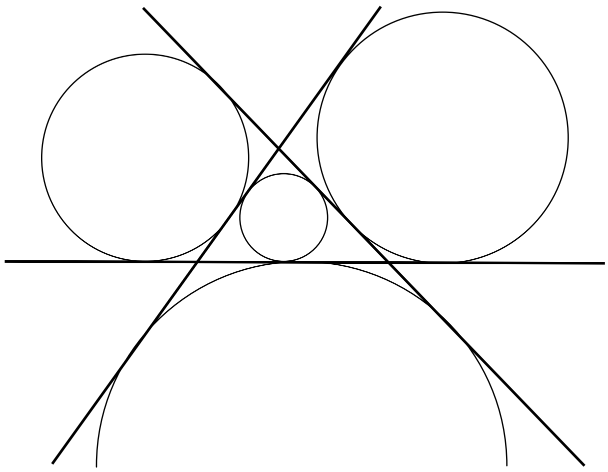


圖　六

線、線、圓

分析及作圖

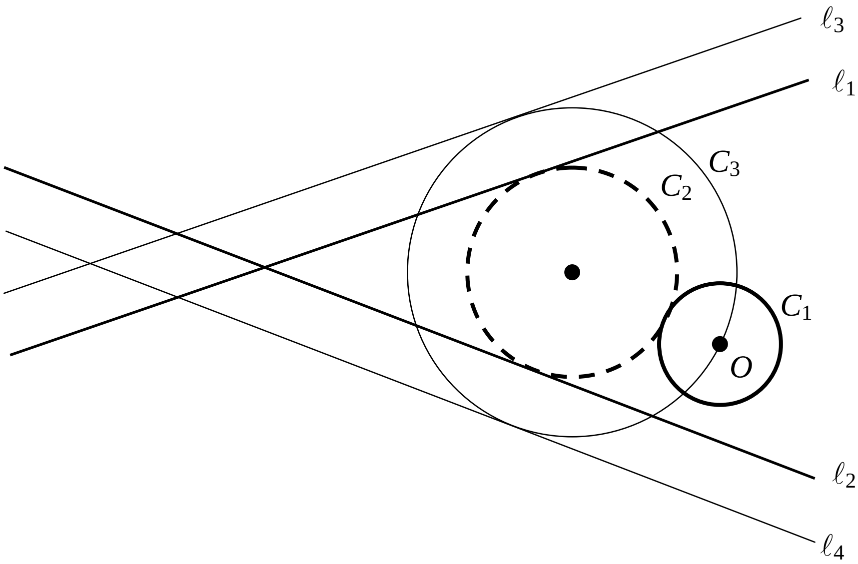


圖　七

圖七中，ℓ_1 和 ℓ_2 為已知直線，C_1 為已知圓。現要作圓 C_2，使它與 ℓ_1、ℓ_2 和 C_1 相切。設 C_1 的圓心為 O。將 ℓ_1 和 ℓ_2 分別向「外」平移至 ℓ_3 和 ℓ_4，其中平移的距離等於 C_1 半徑。按前面「點、線、線」的步驟作圓 C_3，使它通過 O，並且與 ℓ_3 和 ℓ_4 相切。將 C_3 的半徑按 C_1 的半徑減小，得 C_2。C_2 就是所求作的圓。

補充說明

1. 因為「點、線、線」有 2 個解，所以上述的作圖法亦應有 2 個解。另一個解應在圖七 C_1 的右邊，並與 C_1 外切，但未有在圖中繪出。

2. 若將兩線平移的方向變成向「內」，亦可得另外 2 個解，這兩個解與 C_1 內切。總括而言，「線、線、圓」的情況共有 4 個解。

線、圓、圓

分析及作圖

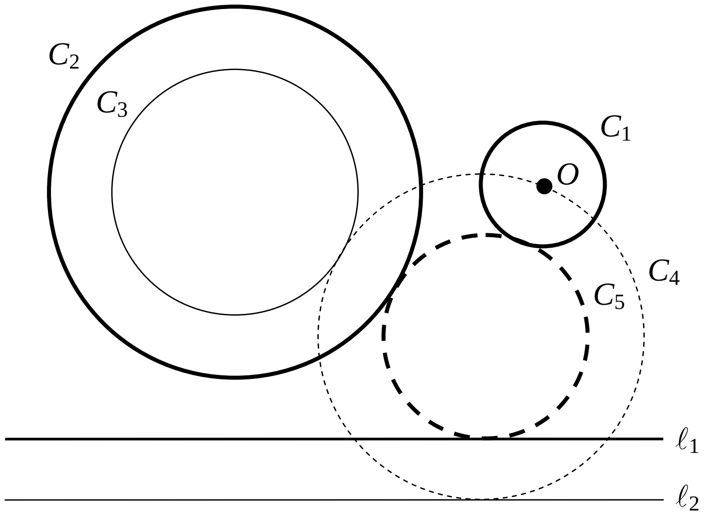


圖　八

圖八中，ℓ_1 為已知直線，C_1 和 C_2 為已知圓。現要作與 ℓ_1、C_1 和 C_2 相切的圓。設 C_1 的圓心為 O。將 ℓ_1 向「外」平移至 ℓ_2，平移的距離等於 C_1 半徑。C_2 的半徑按 C_1 的半徑減小，成為 C_3。按下面將要介紹的「點、線、圓」步驟作圓 C_4，使它通過 O，並與 ℓ_2 和 C_3 相切。亦將 C_4 的半徑按 C_1 的半徑減小，得 C_5。C_5 就是所求作的圓。

同樣，圖八衹畫出「點、線、圓」4 個解的其中一個。另外，若將 ℓ_1 向「內」平移，並將 C_2 的半徑增大，亦可得另外 4 個解。故「線、圓、圓」共有 8 個解。

點、線、圓

分析

圖九中，A 為已知點，ℓ 為已知直線，C_1 為已知圓。現要作圓 C_2，使它通過 A 並且與 ℓ_1 和 C_1 相切。設 O_1 和 O_2 分別為 C_1 和 C_2 的圓心，ℓ 與 C_2 相切於 D，C_1 與 C_2 相切於 E。通過 O_1 作直線垂直於 ℓ，稱垂直線與 ℓ 的交點為 G，稱垂直線與 C_1 的交點為 P 和 Q。連結 PA、DO_2、EO_2、EO_1、DE 和 PE。很明顯，O_1、E、O_2 三點共線。而從圖九觀察得 D、E、P 三點

亦共線。為甚麼呢？

事實上，由等腰三角形性質和 $DO_2 // PO_1$ 得 $\angle DEO_2 = \angle EDO_2 = \angle EPO_1 = \angle PEO_1$。因為 O_1、E、O_2 三點共線，所以 D、E、P 三點亦共線。

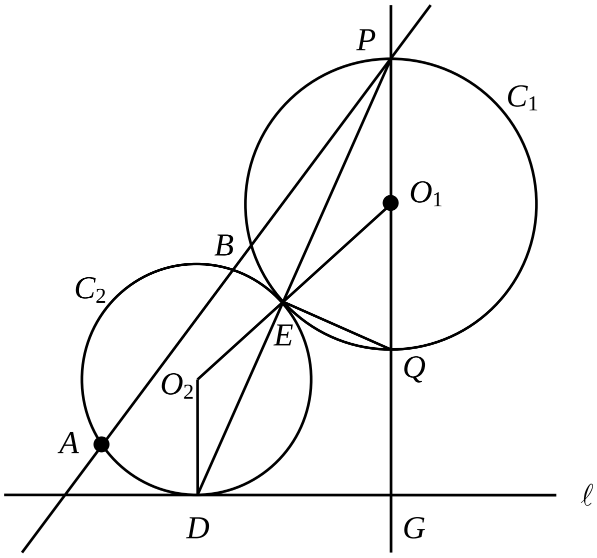


圖　九

由於 $\angle PEQ = 90°$，$\angle DGQ = 90°$，因此 D、E、Q、G 四點共圓。由圓冪定理可知 $PQ \cdot PG = PE \cdot PD$。

另一方面，若稱 PA 與 C_2 的另一交點為 B，則 $PA \cdot PB = PE \cdot PD$。綜合上述結果得 $PA \cdot PB = PQ \cdot PG$。由圓冪定理的逆定理得 A、B、Q、G 四點共圓。留意 A、P、Q、G 是可以確定的，因此 B 亦可隨之而確定。確定了 A、B 和 ℓ 之後，便可以利用「點、點、線」的作圖步驟繪畫出 C_2 了。

作圖步驟

已知 A 點、直線 ℓ 和圓 C_1。設 O_1 為 C_1 的圓心。

1. 通過 O_1 作直線垂直於 ℓ。稱垂直線與 ℓ 的交點為 G，垂直線與 C_1 的交點為 P 和 Q。
2. 按「點、點、點」的步驟作圓 AQG。
3. 連結 PA。稱 PA 與圓 AQG 的另一交點為 B。
4. 按前面「點、點、線」的步驟作通過 A、B 兩點，並且與 ℓ 相切的圓。這就是所求作的圓。

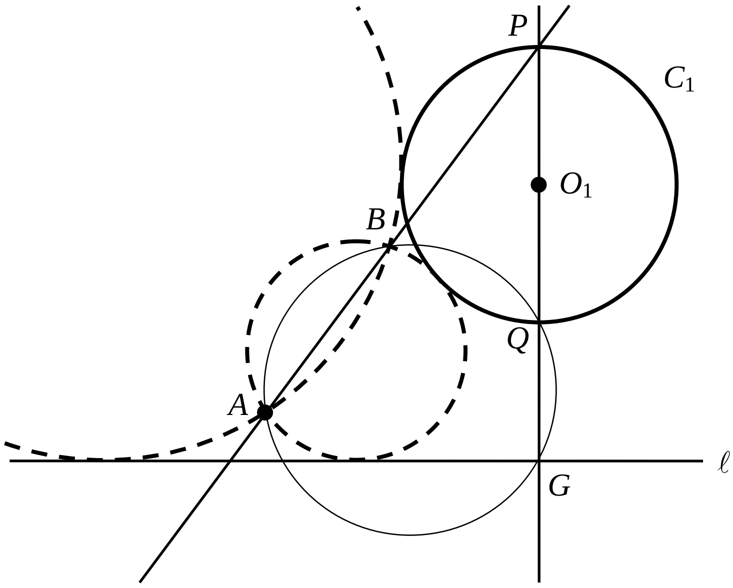
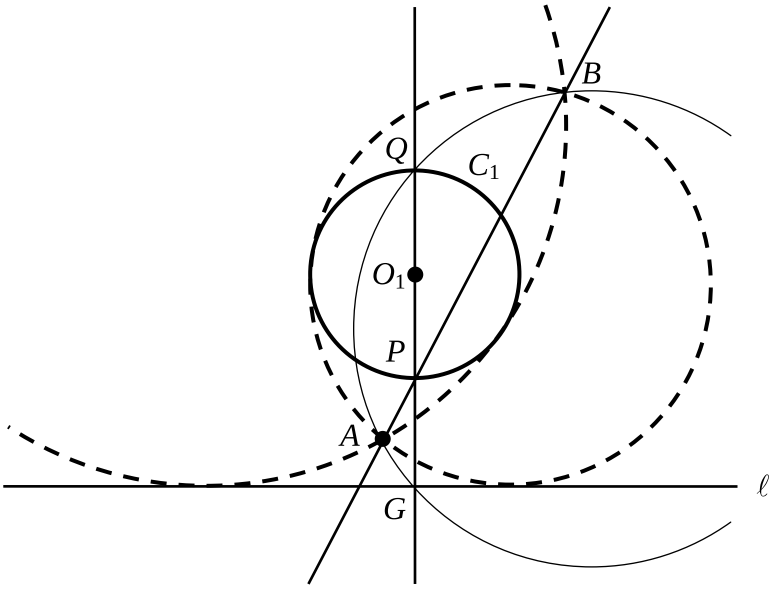


圖　十

<u>補充說明</u>

1.　因為「點、點、線」有 2 個解，所以上述的作圖法亦有 2 個解。

2.　上述步驟中，P、Q 的位置是可以互換的，由此可作另外 2 個解，見圖十一。總結得「點、線、圓」共有 4 個解。



圖十一

總結

阿波羅尼奧斯問題是尺規作圖上的一個難題，但通過研究它和它的「退化問題」，可以讓我們更加瞭解圓冪定理、四點共圓的價值及其重要性。當研究那些「退化問題」時，亦不難發現它們之間的關係，例如：「點、點、圓」和「點、點、線」，「點、圓、圓」和「點、線、圓」，它們的作圖法其實十分相似；「點、線、線」和「線、線、線」同樣使用了反射對稱。

還有，每個作圖題有多少個解，亦是一個十分有趣的問題，而且亦不容易數清楚。例如：「線、圓、圓」，單憑直觀，就未必那麼容易看出它一共有 8 個解。但話雖如此，本文列出的作圖法及理論，其實一般的高中學生是可以應付的，並未有過於超出高中的範圍，而且非常吸引和有意思，值得向學生介紹。

在研究阿波羅尼奧斯問題的初期，曾經嘗試利用坐標幾何和代數方法來求解，亦得到一些有趣的結果。在結束本文之前，亦將以坐標幾何方法解「點、線、線」的分析和作圖步驟寫出，以作記錄。

點、線、線（以坐標幾何及代數方法求解）

分析

設 A 為已知點，ℓ_1 和 ℓ_2 為已知直線。現要作圓，使它通過 A 並且與 ℓ_1 和 ℓ_2 相切。現設 ℓ_1 為 x 軸，ℓ_1 和 ℓ_2 相交於原點 $O(0, 0)$，A 的坐標為 (a, b)，未知圓的圓心位於 $H(h, k)$。很明顯，要解這作圖題，就先要求得 $H(h, k)$。

不難證明，圓心 H 必定位於 ℓ_1 和 ℓ_2 夾角的角平分線之上。若設角平分線的方程為 $y = mx$，則 $k = mh$。由定義可知，未知圓半徑的長度等於圓心 H 與 x 軸（即 ℓ_1）的距離，亦等於 HA 的長度，由此得方程：

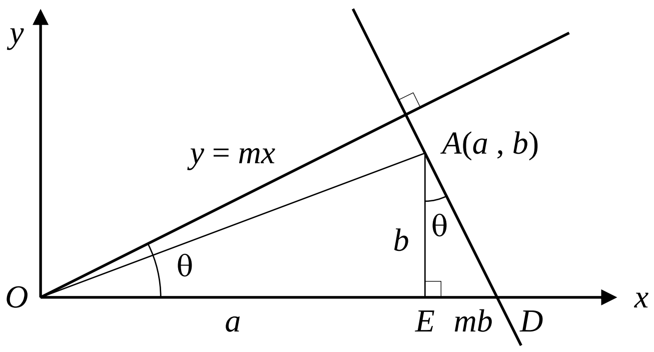
$$(h-a)^2 + (mh-b)^2 = (mh)^2$$

即 $$h^2 - 2(a+mb)h + (a^2+b^2) = 0$$

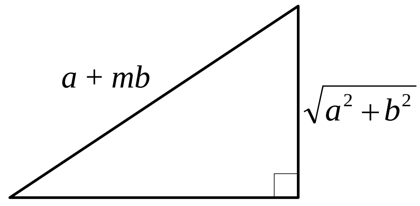
由二次方程求根公式得 $$h = (a+mb) \pm \sqrt{(a+mb)^2 - (a^2+b^2)}$$

圖十二中，設角平分線 $y = mx$ 的傾角等於 θ，即 $\tan\theta = m$。設 E 為 A 向 x 軸的垂直投影，即 $OE = a$，$AE = b$，$OA = \sqrt{a^2+b^2}$。又設 D 為 x 軸上一點使 DA 垂直於直線 $y = mx$。易證 $\angle DAE = \theta$，所以 $ED = b\tan\theta = mb$。

換言之，$OD = a + mb$。



圖十二

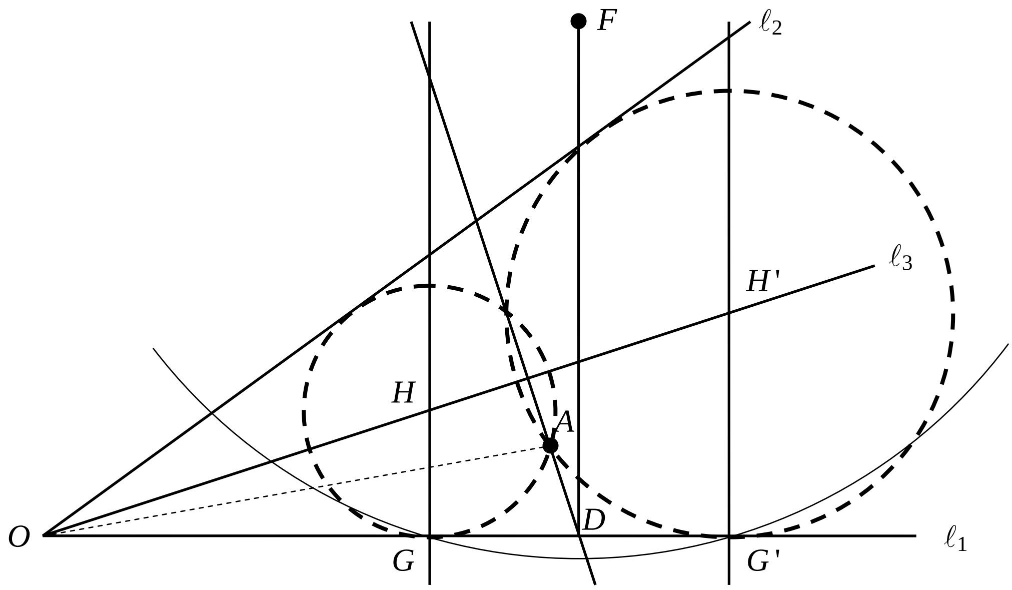


圖十三

圖十三為一直角三角形，其斜邊長 $a + mb$，其中一直角邊長 $\sqrt{a^2+b^2}$，則由畢氏定理得另一直角邊長 $\sqrt{(a+mb)^2-(a^2+b^2)}$。將圖十二和圖十三結合，便可以利用直尺和圓規作 h，從而確定未知圓圓心的位置。

<u>作圖步驟</u>

已知 A 點及直線 ℓ_1 和 ℓ_2。設 O 為 ℓ_1 和 ℓ_2 的交點。



圖十四

1. 作 ℓ_1 和 ℓ_2 夾角的角平分線，並稱之為 ℓ_3。
2. 通過 A 作直線垂直於 ℓ_3。稱垂直線與 ℓ_1 的交點為 D。

3. 通過 D 作直線 FD 垂直於 ℓ_1，並使 $FD = OA$。
4. 以 F 為圓心，OD 長度為半徑作圓。稱圓與 ℓ_1 的交點為 G。
5. 通過 G 作直線垂直於 ℓ_1。稱垂直線與 ℓ_3 的交點為 H。
6. 以 H 為圓心，HA 為半徑作圓。這就是所求作的圓。

補充說明

圖十四中，OG 和 OG' 同樣是方程 $h^2 - 2(a + mb)h + (a^2 + b^2) = 0$ 的解，故如圖所示，此題有 2 個解。

參考書目

[1] 張奠宙、戴再平（編）(1997)。《生活中的中學數學》。台北：九章出版社（本書原本由華東師範大學出版社於 1996 年出版，原名為《中學數學問題集》）。

[2] Courant, R., Robbins, H. (1941). *What is Mathematics?*. New York: Oxford University Press.

[3] 梅向明、周春荔（2000）。《尺規作圖話古今》。長沙：湖南教育出版社。

作者電郵：jckleung@netvigator.com