

乘法概念的一次補底教學

馮仲頤

香港教育學院全日制學生

先寫被乘數的迷思

在初小階段學習乘法，教師和學生之間有一常見的約定，就是：在算式中，先寫的數叫「被乘數」，後寫的數叫「乘數」；被乘數是指被倍大的數量（或稱被重複的數量），乘數是指倍大的次數（或稱重複的次數）。這約定建基於教學的需要，讓師生在討論應用處境時，有共通的語言，例如：

例一 弟弟有 8 元，姐姐有的錢是弟弟的 2 倍，問姐姐有多少元？

$$\begin{aligned} & 8 \text{ (元)} \times 2 \text{ (倍)} \quad (\text{約定意思：} 8 \text{ 重複 } 2 \text{ 次 或 有 } 2 \text{ 個 } 8) \\ & = \underline{\underline{16 \text{ (元)}}} \end{aligned}$$

例二 姐姐給弟弟 8 個 2 元硬幣，問姐姐共給弟弟多少元？

$$\begin{aligned} & 2 \text{ (元)} \times 8 \text{ (個)} \quad (\text{約定意思：} 2 \text{ 重複 } 8 \text{ 次 或 有 } 8 \text{ 個 } 2) \\ & = \underline{\underline{16 \text{ (元)}}} \end{aligned}$$

在約定下，「 $2 \text{ (元)} \times 8 \text{ (個)}$ 」被理解為「有 8 個 2 元」，明確指出被倍大的數量及倍大的次數。培育學生從不同的應用處境準確區分「被乘數」及「乘數」是一種思考能力的訓練，與運算能力的培育不同，卻同樣重要。認清不同的概念有助增強學生對不同應用處境的理解能力，加上準確運算，當學生遇到難題時，便事半功倍。

可是，一些對兩個概念不甚了解的學生，往往會把應用處境中先出現的數，如例二的「8」先寫，然後加上一個乘號，接著寫上較後出現的數字「2」，得出 $8 \times 2 = 16 \text{ (元)}$ 。雖然結果相同，但從定約的表達方式來理解算式的話，學生明顯地未能區分哪個是被倍大的數。

這現象有很多原因：學生未有真正思考哪個是被倍大的數、未有提供足夠的時間讓學生思考、學生不知道有「約定」的表達方式等等。有時候為免初小學生書寫太多文字，阻礙教學的推進，不少教師容許學生於寫算

式時把單位省去，只填上答案的單位，這使教師未能清楚檢視學生能否區分哪個是被倍大的數，有時候可能誤解學生的想法，現舉一例。

例三 有 3 輛汽車，每輛有車輪 4 個，問共有車輪多少個？

$$\text{算式 A: } 4 \times 3 = 12 \text{ (個)}$$

算式 A 的意思是「每輛汽車有車輪 4 個，重複 3 次 (3 輛)，共有車輪 12 個」。

$$\text{算式 B: } 3 \times 4 = 12 \text{ (個)}$$

算式 B 的意思是「現有 4 類車輪 (左前輪、右前輪、左後輪、右後輪)，每類 3 個 (3 輛)，即有 4 個 3，共有 12 個車輪」。

算式 B 中，礙於被乘數和乘數都沒有寫上單位，單從算式和答案，不容易把懂的和不懂的區分出來。相反地，如果要求學生寫上各數的單位，便會看到「 $3 \text{ (輛)} \times 4 \text{ (個)} = 12 \text{ (個)}$ 」和「 $3 \text{ (個)} \times 4 \text{ (類)} = 12 \text{ (個)}$ 」兩種算式。前者的混淆顯而易見 (假設依約定表達)，後者的別有心思，亦呼之欲出，只是其思路較不尋常而已。訓練學生思考文字與符號的關係，使得文字與符號兩者的意思相符，才算學懂乘法哩！

其實「先寫的數是被乘數，後寫的數是乘數」只是一種過渡性的教學約定，並非由數學原理衍生。學生升至高小時，開始學習代數，這約定便會淡出，試看學生如何以代數式回答下列問題：

例四 弟弟有 y 元，姐姐有的錢是弟弟的兩倍，問姐姐有多少元？

$$\begin{aligned} & y \text{ (元)} \times 2 \text{ (倍)} \\ = & 2 \times y \text{ (元)} && \text{(利用乘法交換性質)} \\ = & \underline{2y \text{ (元)}} && \text{(約定的代數表式寫法)} \end{aligned}$$

例五 姐姐給弟弟 y 個 2 元，問姐姐給弟弟多少元？

$$\begin{aligned} & 2 \text{ (元)} \times y \text{ (個)} \\ = & \underline{2y \text{ (元)}} \end{aligned}$$

乘法交換性質使被乘數和乘數在算式中的位置失去必然性，例四和例

五都得出 $2y$ (先寫數字，後寫字母是約定的代數式寫法)，顯然違反了「先寫的數是被乘數，後寫的數是乘數」的約定。

從應用處境區分被乘數和乘數是概念理解的一種表現，把它約化為乘式中書寫被乘數和乘數的順序規定，只是過渡性的安排，不應奉為鐵律。然而，在初小階段引入這個過渡性約定無可厚非，一方面有助檢視學生能否區分哪個數被倍大，哪個數是倍大的次數，另一方面也提供了課堂數學互動的共同語言。

筆者於 2006 年 7 月到一所小學為一些能順利升讀三年級，但數學根基較弱的學生教授暑期數學班，乘法是其中一個課題。為了令學生了解被乘數和乘數兩個概念，筆者順應該校沿用的先寫被乘數的約定，加入要求學生繪畫適當的圖畫，效果令人滿意。本文正是這次經歷的實踐記錄和個人省思。

一個教學事例

開始教授乘法時，筆者跟學生討論以下一道題目：

桌上有餅乾 6 包，每包有餅乾 4 塊，問共有餅乾多少塊？

踴躍的學生拋出不同的意見「 6×4 」、「 4×6 」或「24」，於是師生之間展開了以下的一段問答：

教師追問：為何是「 6×4 」不是「 4×6 」，它們有什麼分別？

學生回應：沒有分別，計算結果都是 24。

教師再問：不錯，「 6×4 」和「 4×6 」計算後都得出 24，數值是相同的，但「 6×4 」和「 4×6 」所表達的意思是有分別的，你知道它們的分別嗎？

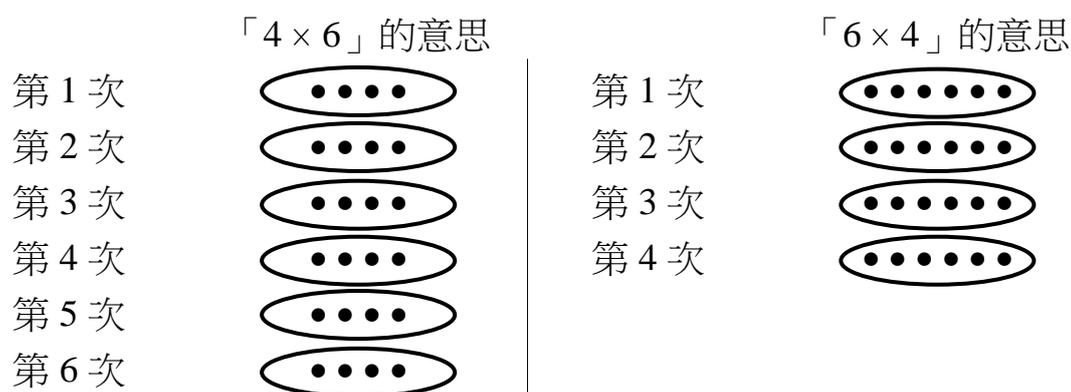
學生們都不再回應，也許他們都不懂。

從以上事例得知，學生都不習慣為算式中的數加上單位，也未能說明「 6×4 」和「 4×6 」的約定意思。

「數學學習」追求什麼？

數學學習追求什麼？持不同數學觀、價值觀的人，皆有不同意見，但都離不開以下幾項：學生懂得自行演繹推論、圖解題目、以準確的數學語言表達意思、精確運算；學生對學習數學產生興趣等等。相信數學科教師都能列舉幾項或更多，惟各人對「追求什麼」所持的優先次序並不一樣。初小學生因能力所限，未能進行艱深的演繹推論，但他們是有能力以準確的數學語言（口述）及畫圖來思考、解釋及表達數字和運算符號之間的關係，這時他們的腦袋才能真正進入思考數學的狀態，接受思考能力的訓練。精確運算訓練與思考訓練同樣重要，但兩者的本質有異，精確運算可透過重複操練達成，日久見功；而數學思考訓練，卻不能從重複操練習得，要從小開始培育。

若以數學化教學（馮振業，2004）理念來設計數學科教學流程，學生學習的過程將與傳統的教學有所區別。數學化教學不純要求算式和答案正確，還要求學生懂得表達數學，能以準確數學語言、圖畫來表達乘法的意思。學生未能分辨「 6×4 」和「 4×6 」的意思，因他們不盡了解被乘數和乘數之間的區別，當學生掌握了有關乘法的數學語言，混淆便即一掃而空。以「 4×6 」為例，這可理解為「有 6 個 4」；「4 重複 6 次」；「4 的 6 倍」，這明顯有別於「 6×4 」，若學生仍未清楚，可以自行畫圖理解如下：

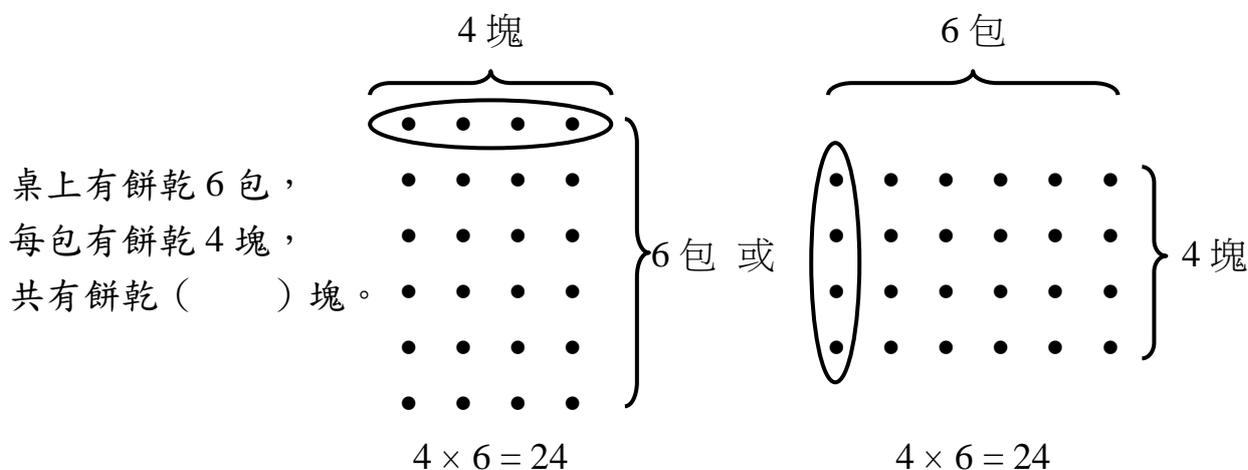


能這樣解釋及說明被乘數和乘數的意思，才算真正學會乘法。

教學設計

筆者安排的教學流程共用上 1.5 小時分兩天進行，用以鞏固升上三年級的學生的乘法概念。經過上年度的學習學生都熟誦乘數表，但他們未能準確解釋「 6×4 」和「 4×6 」兩者的分別，或不懂以圖畫表示「 6×4 」和

「 4×6 」。為了讓學生更掌握乘法中被乘數和乘數的意思，在起初溫習乘法時，學生需要畫圖，並要圈出被重複的被乘數，如下圖：



在畫圖的過程中，學生需要認真理解應用題的內容，各數代表的意思，思考哪個是被乘數（被重複的數量）和哪個是乘數（重複的次數），最後得出正確的算式。完成整個過程，學生可靈活地對應數字、符號、文字和圖畫。同時，在課堂上學生不單要畫圖，還要根據圖示輪流口述該道乘數的意思，如從上圖可以得出「 4×6 」就是「有 6 個 4」；「4 重複 6 次」；「4 的 6 倍」，或解釋為何不是「 6×4 」等。

溫習過後，經過七次畫圖經驗（見附錄），及以準確的數學語言解說圖畫的意思，再做應用題時學生便可省略畫圖，直接列式計算。

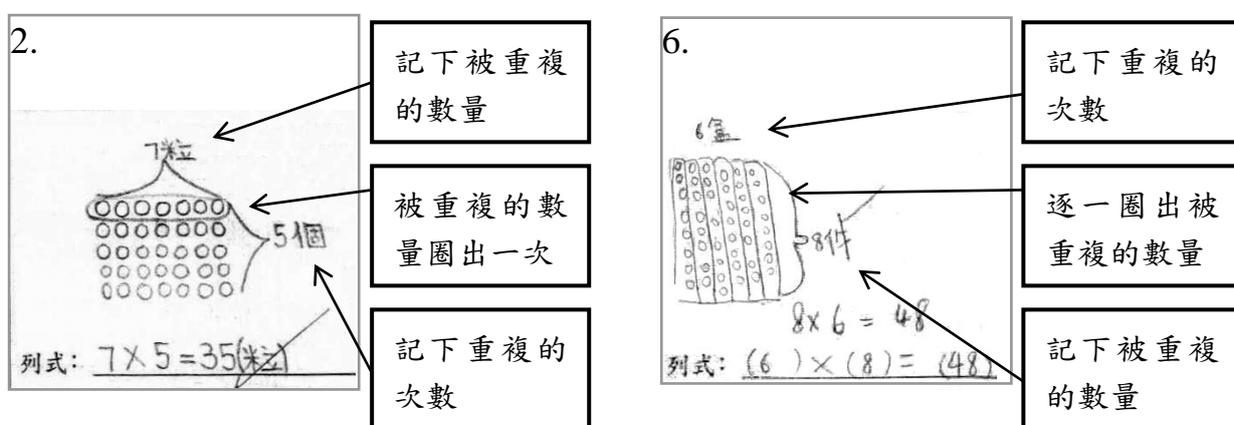
課室實踐

教師講授被乘數和乘數的約定表達方式後，學生在工作紙以兩個方法表示對應用處境的理解：畫圖、列式，他們要確保文字、圖畫、算式都是表達相同意思，都能互相對應的。

約六成學生能以正確圖畫及文字準確區別七個不同應用處境中的被乘數（被重複的數量）和乘數（重複的次數）。選擇先畫圖後計算的同學準確區分被乘數（被重複的數量）和乘數（重複的次數）的成功率較先計算後畫圖的高，這說明培養良好的工作習慣是有必要的。由於學生對乘法已有一定理解，所以他們有不同的工作習慣：有約 40% 學生在教師的鼓勵之下先畫圖後計算，有約 60% 的學生先計算後畫圖。先畫圖後計算是合理程序，學生從圖中準確圈出被重複的被乘數後，便可得出正確的算式；先計

算後畫圖是因學生未有良好的工作習慣（看畢題目隨即寫下算式），然後從算式（或文字）得到相對的圖，最後他們要重新檢驗三者（文字、圖畫、算式）的意思是否一致，但一般學生都沒有這種習慣，未能七題全對的學生，多是因為算式與圖畫所表示意思的不同。

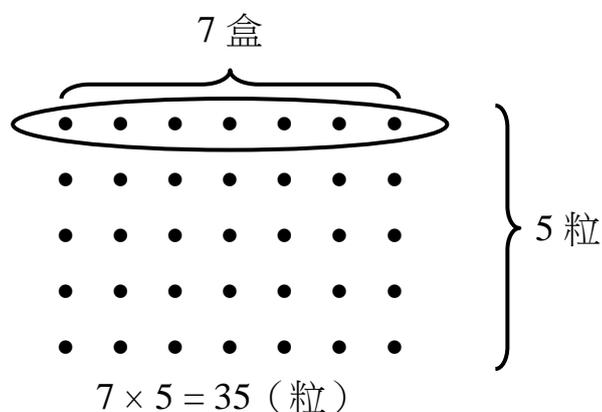
綜觀學生作業樣本，畫圖方法有兩種：方法一是把被重複的數量圈出一次（見下圖左），並記下被重複的數量及重複的次數；方法二是逐一圈出被重複的數量（見下圖右），並記下被重複的數量及重複的次數。做作業時學生可根據自己的能力選取最合適的表達方式。



在畫圖時學生要在圖中寫上相應的單位，以便找出被重複數量，再寫出相對的算式如「 $4 \times 6 = 24$ 」，在執行時筆者未有要求學生在算式寫上單位，是一敗筆，否則對應應可更清晰、緊密。

為進一步了解學生的理解程度，筆者在黑板上寫上以下應用題、圖畫及算式，讓學生指出錯處及解說：

小明有 7 盒糖果，
每盒糖果有 5 粒，
問小明共有糖果多少粒？



教師： 以上的圖像、算式都出錯了，你可以指出來嗎？

學生 A： 圖畫錯了。

教師： 哪裡畫錯了？

學生 A： 應該是打直（縱向）圈的。

教師： 為什麼是打直（縱向）圈的？

學生 A： 一盒糖果有 5 粒，不是 7 粒。

教師： 答得好。請問 5 與 7 有什麼關係呢？

學生 B： 5 粒糖重複 7 次，（算式）應該是「 5×7 」不是「 7×5 」。

從畫圖、列式計算及對話都能得知學生學懂了乘法，整個教學設計期望能讓學生釐清概念，及能於文字、圖像和符號之間靈活表達和思考，目標大致達成。

參考書目

馮振業 (2004)：《數學化教學：理論、實踐與前瞻》，載於鄧幹明、黃家樂、李文生、莫雅慈（編），《基香港數學教育會議 —— 2004 論文集》，頁 78 – 88，香港，香港大學教育學院。

致謝：本文撰寫過程中得到馮振業博士的悉心指導，在此深表謝意！

作者電郵：s0328670@ied.edu.hk

附錄

小心看題目，畫圖思考，列式計算答案。

1. 一包糖分給 4 人，每人有 6 粒，這包糖有（ ）粒。
2. 做一個蛋糕，用 7 粒草莓，做 5 個蛋糕，用草莓（ ）粒。
3. 老師買了 6 包餅乾，每包餅乾有 4 塊，共有餅乾（ ）塊。
4. 爸爸每天工作 8 小時，他一星期共工作（ ）小時。
5. 五甲班課室有 5 行座位，每行坐 6 位學生，五甲班有（ ）名學生。
6. 一盒西餅有 8 件，現有 6 盒西餅，共有西餅（ ）件。
7. 一袋波子共有 7 粒，現有 6 袋，共有波子（ ）粒。