數學化教學：數型

陳麗萍
東華三院港九電器商聯會小學下午校
馮振業
香港教育學院數社科技學系

引言

對不少小學教師來說，「數型」是一個不容易捉摸的課題。它不像「加」、「減」、「乘」、「除」或是「四邊形」、「三角形」一樣，有著非學不可的元素 —— 往後學習數學的預備知識。也就是說，它是學了看不到有何得益，不學又好像並無不妥的課題。因此，它往往不是教師最關心學生表現的一課。這種可有可無的地位，令不少人甚至認為大可把它從課程中刪去。對很多教師而言，學生的學習歷程只是流於背誦公式，掌握不好，亦即背誦不熟，這樣的學習過程毫無意義可言！記得曾經有教師說過，每年面對這課題時，總要重新背誦一遍有關公式，才有信心進入課室。教師尚且如此，何況學生？在新課程之下，數型已由小六的必授部分移至增潤部分（香港課程發展議會，2000）。可以預期，叫苦的大可不教，不然，總得面對如何為這課題定位的問題。本文嘗試為這課題重新定位，透過數學化觀點（馮，2004），揭示數學學習之中，以「形」馭「數」的面相。

重塑學習主軸

依課程文件，數型的學習包括兩項重點：

1. 認識簡單數型如正方形數和三角形數。
2. 認識及欣賞其他簡單數型的規律。

從壞處想，這兩項重點十分概括，並無清楚刻劃實質的學習是甚麼。要能運用哪些公式？通項公式？求和公式？「其他簡單數型」包括甚麼？不包括甚麼？要能證明命題嗎？抑或是直觀了事？…… 然而，從好處想，就是既無太多要求，亦無多少限制。教師大可自由發揮，享受廣闊的自主空間。

即使沒有任何外加的要求和限制，對學生卻不可能沒有要求。不少學校愛出類似下列的考題：

（一） 求 $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 50$。

（二） 求 $11 + 12 + 13 + 14 + \ldots + 50$。

（三） 求 $1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + 64$。

擔心題（一）過於淺易的教師，也許會喜歡題（二），而題（三）卻是用來分出尖子的。在爭分奪秒的筆試環境，最划算還是有公式可代。於是，本來是中四學習內容的算術級數求和公式，便糊裡糊塗地跑進了小六的課堂。試想，如果學生運用算術級數求和公式成功計算上述三題，分數儘管拿足了，這樣的表現又跟學習數型如何扯上關係？退一步說，即使教師不教，只要測考裡有著類似的問題，又如何阻止家長或補習教師補上一筆？最終的結果，還不是背誦公式的比賽。為了難到希望只背一式（算術級數和 =（首項 + 尾項）÷ 2 × 項數）走天涯的學生，教師或許會出以下問題：

（四） 求右式的項數：$13 + 14 + 15 + \cdots = 1197$

這樣的追逐，可算是「生高一尺，師高一丈」，沒完沒了，卻不知所為何事。最苦的，還是一群被一堆摸不著頭腦的公式，壓得透不過氣的小六學生。

如果以純符號的方法處理級數問題，是徹頭徹尾的代數手法，完全沒有幾何味道。這樣的學習經歷，在中學階段多的是，犯不著在小學偷步開始。筆者等認為，透過圖形理解數列的性質，不但有趣，而且可提供多元化的思考訓練：

訓練 1　觀察圖形規律，得出數列的通項公式；

訓練 2　以點陣圖表示數列，然後把有關數列的問題轉化成有關點陣的問題；

訓練 3　由分割或拼砌點陣圖，解決各種有關數列的問題；

訓練 4　學會用圖形證明代數命題。

現舉例說明上述四項訓練的具體內涵：

例一　學生透過觀察下列規律（圖一），得出「每邊有 n 點的空心正方形共有 $4(n-1)$ 點」。

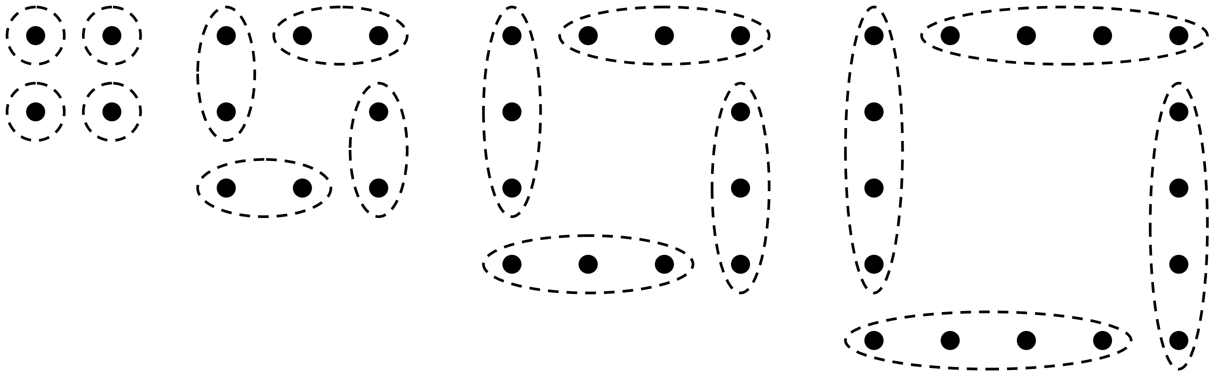


圖　一

例二　學生把「兩連續三角形數的和都是正方形數嗎？」轉化成「圖二兩三角形點陣是否必定可拼成一個正方形點陣？」

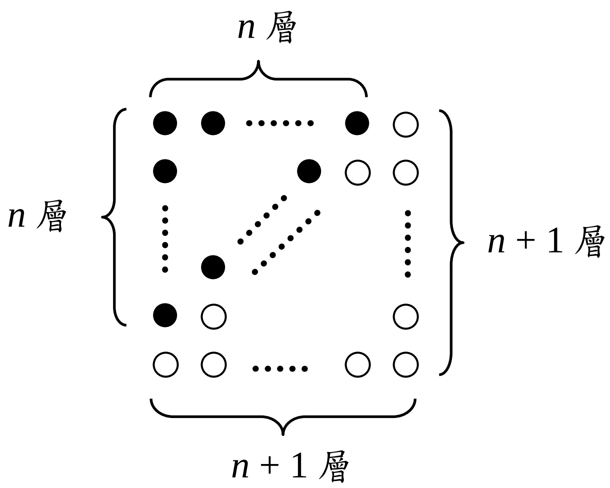


圖　二

例三　學生把「1 , 4 , 7 , 10 , … , 64」轉化成圖三有規律的點陣，然後透過分割成三個三角形點陣（圖四）的方法（並不唯一），計算 1 + 4 + 7 + 10 + … + 64。

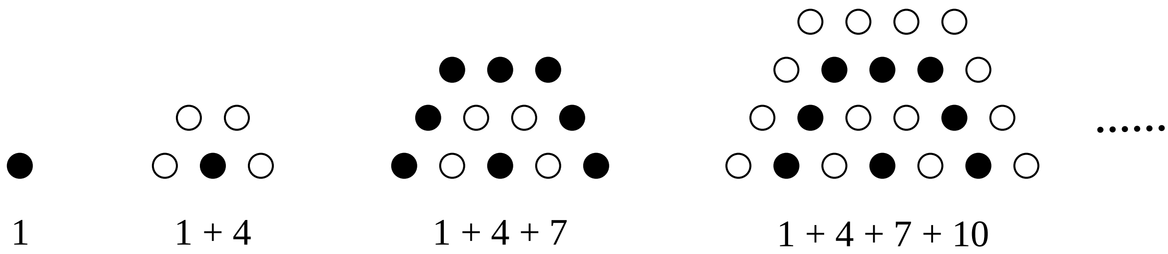


圖　三

當中關鍵的一步，是要找到兩種三角形點陣每邊的點數，這正好回到第一項訓練。小心觀察點陣圖的規律，不難發現由 $(64+2)\div 3$ 就可找到大

三角形點陣每邊的點數，而小三角形點陣每邊的點數比這數小 1。

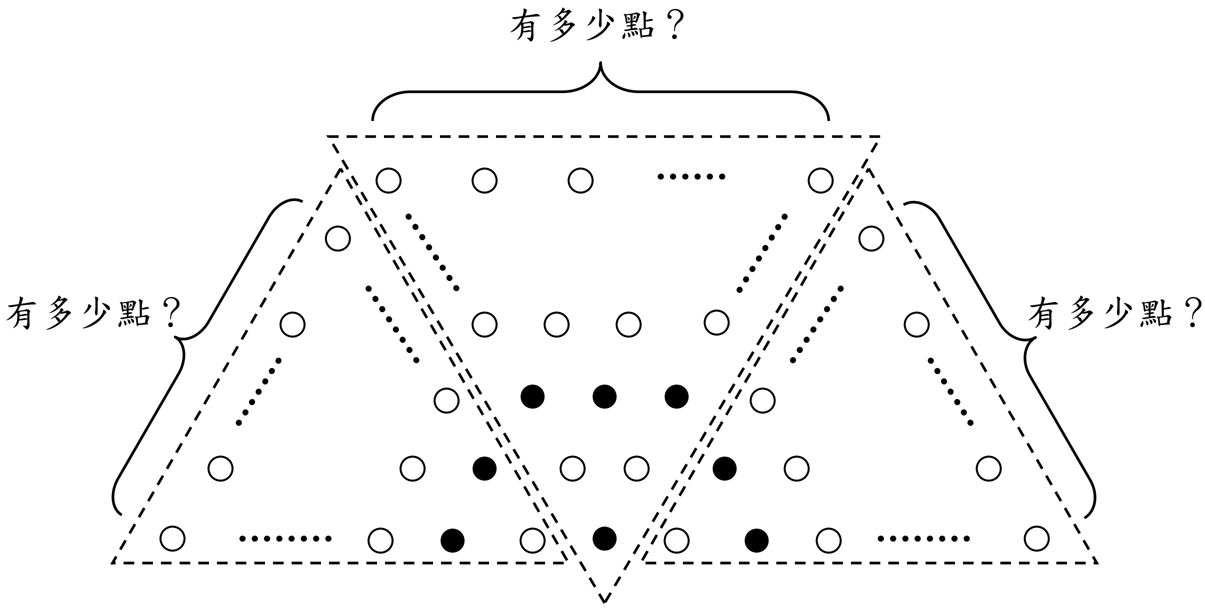


圖　四

例四　給學生觀察以下數據，很容易發現三角形數的 8 倍再加 1 都是正方形數。

n	第 n 個三角形數	第 n 個三角形數 $\times 8 + 1$
1	1	9
2	3	25
3	6	49
4	10	81
5	15	121
6	21	169
7	28	225
8	36	289
9	45	361

對學生而言，挑戰在於如何得知上面列出的並非巧合。用代數方法，就只有以下一行：

$$8\times\frac{n(n+1)}{2}+1=4n(n+1)=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$$

用圖入手，就得進行圖五的拼砌：

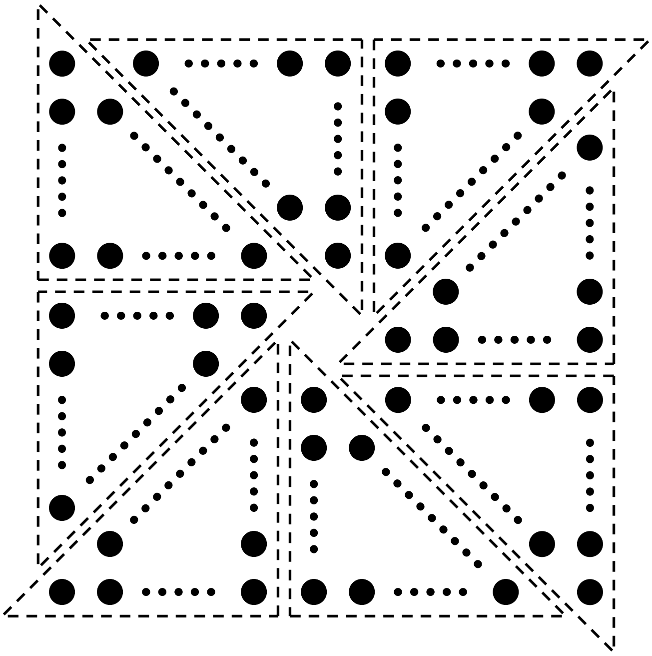


圖　五

由兩個相同的三角形點陣，必可拼出鄰邊點數為連續數的長方形點陣（這樣的點數叫「長方形數」）。而四個這樣的長方形點陣，再加 1 點（上圖中空位置）又可以拼出正方形點陣。慣用代數的人縱然免了這樣的功夫，卻也錯過了使人觸覺敏銳，思辨靈巧的幾何訓練。

上述四項訓練，可以換個說法如下：

訓練 1　以代數式描述點陣圖的規律；

訓練 2　以點陣圖建立幾何模型，研究數列；

訓練 3　透過拼砌點陣圖，解數學題；

訓練 4　學會不以代數手法，解釋代數命題。

從數學化觀點看，訓練 1 和 2 屬早段學習，旨在建立「形」與「數」的靈活對應，形成一種新的思考模式。訓練 1 要求由「形」走向「數」，而訓練 2 則要求由「數」走向「形」。有了這兩項基本功，便可開展後段學習。訓練 3 和 4 就是要讓學生運用這種新的思考模式，處理多種有關數列的問

題，從而體會以「形」馭「數」的精妙和樂趣。

教學流程

在編排教學流程時，有三點值得關注：

A. 設計要有連貫性，避免予人零碎的感覺；

B. 設計要能抑壓學生背誦公式的傾向，否則將無法走到以「形」馭「數」的階段；

C. 設計要能令大部分學生掌握形數對應的基本知識。

如果緊跟課程文件，只教授三角形數和正方形數，難免欠連貫性。從圖形學習的已有知識看，有三角形數和正方形數，是否也該有梯形數、平行四邊形數、菱形數等等？為了迴避這尷尬一問，筆者等選擇了以點陣入手。按圖六逐層遞增，要求學生以連加式表示總點數。

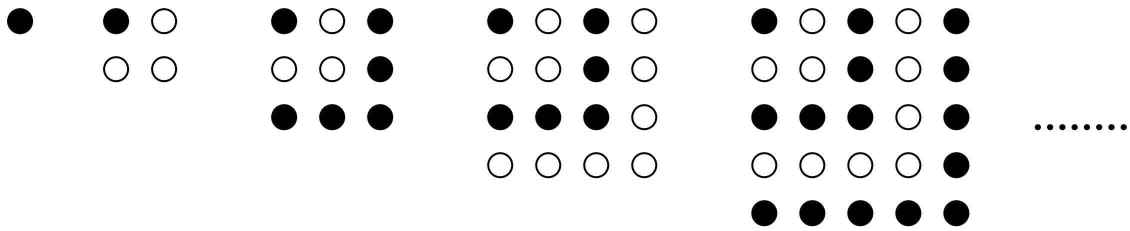


圖　六

當通項公式出現後（由 $1 + 3 = 2^2$、$1 + 3 + 5 = 3^2$、$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ ⋯，推導 $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$），除了介紹正方形數的意義，還要令學生注意這些數都是由 1 開始的連續奇數的和。接著，教師便可順水推舟，要求學生想想：「由 2 開始的連續偶數的和，是否也可排出有規律的點陣圖？」如此輕鬆一問，便即開啟了長方形數的研習。於是，學生又要排出下面一幅一幅的點陣圖（圖七），並回答與前同出一轍的一籃子問題。

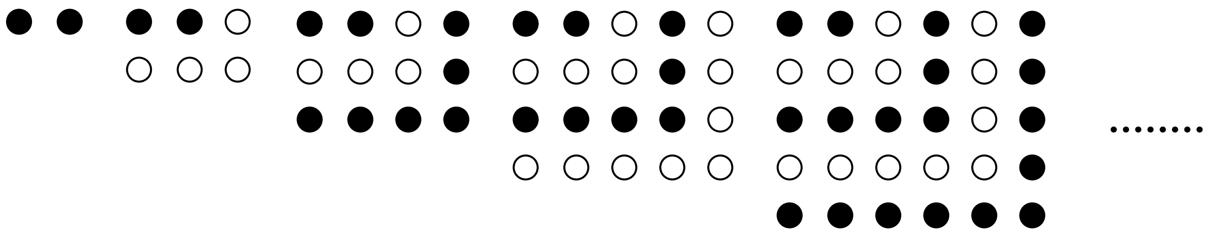


圖　七

這樣的佈局，一方面讓形數對應的訓練重複鞏固，另一方面又令發展顯得順理成章。當完成了由 1 開始的連續奇數及由 2 開始的連續偶數的和的探討後，學生都會覺得由 1 開始的連續數的和（即三角形數）理應就是下一個探討的問題。

有了正方形數和長方形數的通項公式（第 n 個正方形數是 n^2、第 n 個長方形數是 $n(n+1)$），找三角形數的通項公式，便可循化未知為已知的軌道完成。教師大可提問：「如果可以把要求通項公式的三角形點陣，以分割或拼砌的方法造出前面已經找到通項公式的點陣圖，是否便可以利用已知的通項公式，找到未知的通項公式？」由於加插了長方形數，學生能自己找到通項公式的機會理應較大。一旦覺察兩個相同的三角形點陣必可拼出鄰邊點數差 1 的長方形點陣，找通項公式的工作自然水到渠成。

必須一提的，就是工作紙的設計，集中要求形數對應，單單背誦公式，將無法完成。因此，本文提出的教學流程建議，已充分回應了上述 A、B、C 三點關注事項。

實踐

如筆者等所料，學生觀察多個對應正方形數的點陣後，很容易便發現了正方形數的通項公式（訓練 1）。接著，為了抑制學生背誦公式的傾向，並且令他們有效地進行訓練 2，教師為每位學生準備了一袋黑白鈕扣，要求學生先用黑白鈕扣逐層排出數列對應的點陣，然後將點陣繪畫出來；例如：

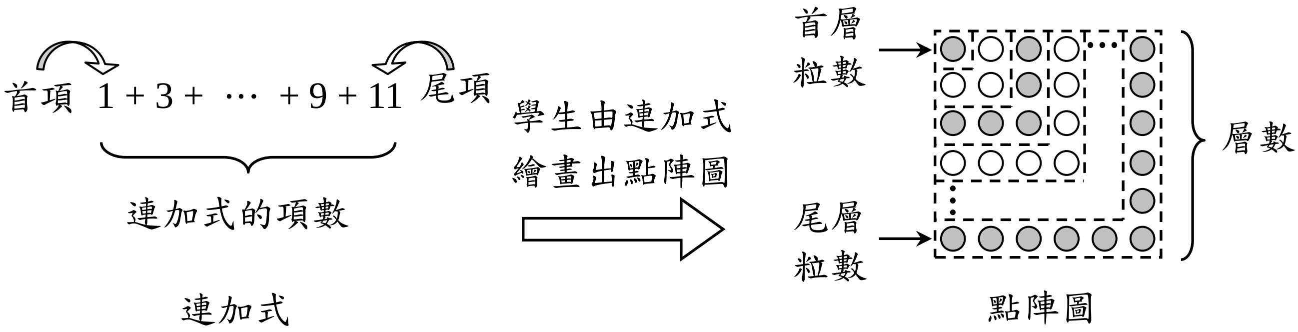


圖　八

經過一連串排鈕扣、繪畫點陣圖的工作，學生已經掌握了以點陣表示數列的方法，並熟知下列對應：

連加式	點陣圖
首　項	首層點數
尾　項	尾層點數
項　數	層　數
總　和	總點數

當學生建立了「形」與「數」的靈活對應，形成一種新的思考模式之後，便開始把有關數列的問題轉化成有關點陣的問題，以體會以「形」馭「數」的精妙和樂趣。至於有關數列的問題，以正方形數為例，供學生研習的有以下各類形：

- 如果首項是 1

1. 已知尾項，找出項數和總和

   例子： 1 + 3 + 5 + ⋯ + 105 + 107 =？

   這連加式中有多少個奇數及和是多少？

2. 已知總和，找出項數和尾項

   例子： 1 + 3 + 5 + ⋯ +？= 441

   這連加式中有多少個奇數及尾項是多少？

- 如果首項不是 1

3. 已知首項和尾項，找出項數和總和

   例子： 13 + 15 + 17 + ⋯ + 455 + 457 =？

   這連加式中有多少個奇數及和是多少？

4. 已知首項和項數，找出尾項和總和

   例子： 13 + 15 + 17 + ⋯ +？，已知這連加式中共有 24 個奇數，那麼尾項及總和是多少？

5. 已知項數和尾項，找出首項和總和

   例子： ？+ ⋯ + 455 + 457，已知這連加式中共有 24 個奇數，那麼首項及和是多少？

6. 已知首項和總和，找出尾項和項數

例子： 13 + 15 + 17 + ⋯ + ？，已知這連加式的和是 1989，那麼它由多少個奇數組成及尾項又是多少？

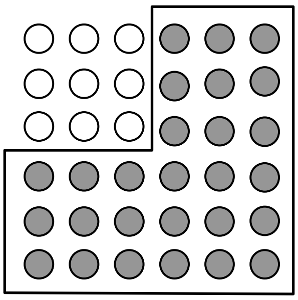
7. 已知尾項和總和，找出首項和項數

例子： ？+ ⋯ + 127 + 129，已知這連加式的和是 4000，那麼它由多少個奇數組成及首項又是多少？

8. 已知項數和總和，找出首項和尾項

例子： ？+ ⋯ + ？，已知這連加式是由 40 個奇數組成，且和是 3200，那麼它的首項及尾項各是多少？

在首項不是 1 的問題中，題類 3 至 7 均可通過繪畫多個不同的對應點陣（如圖九），分別觀察全圖、白色部分與灰色部分三者之間的關係，其中包括：層數的相互關係，白色部分的尾項與灰色部分的首項的關係等。



7 + 9 + 11

圖　九

在數值大或項數多的情況下，把點陣圖完整地畫出並不可行。因此，在工作紙中，加入了讓學生在省略圖中填入適當的資料如下：

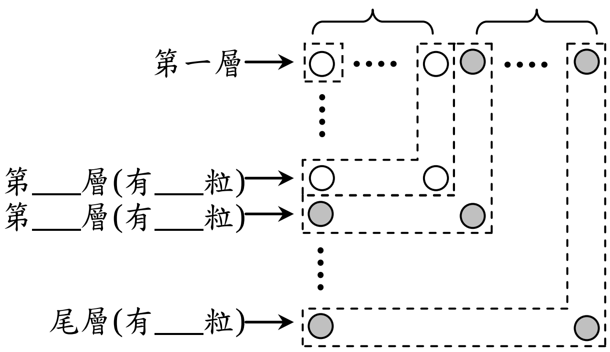
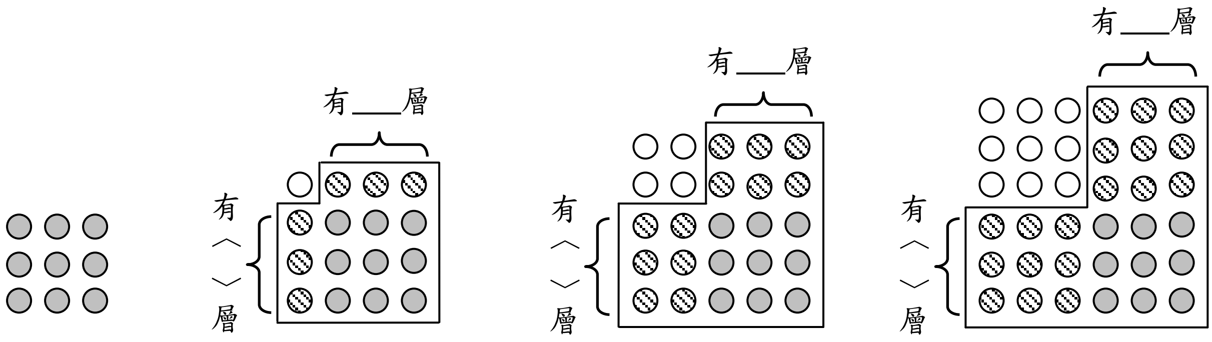


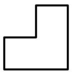
圖　十

至於題類 8，相信不用點陣圖幫助，是很難找到答案的。學生首先要觀察以下的排列：

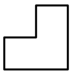


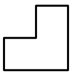
圖十一

在教師的小心引導之下，學生有以下發現：

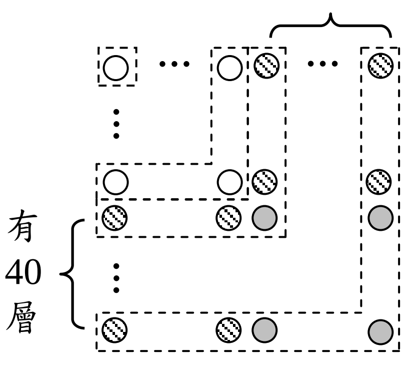
發現 1  內的層數不變，且總點數是  和  的點數之和

發現 2  部分的點數分成兩相等部分（左側及上方）

發現 3  部分的層數與  的層數一樣

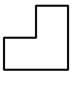
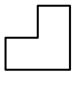
發現 4  部分的首項 =  部分尾項 + 2

由以上的發現，學生歸納出以下的結果：



圖十二

a. 由發現 3 得知， 部分有 40 層，即總點數是 1600。

b.  部分內原有總點數 3200，由發現 2 及結果 a 得知， 部分的首項是 41，尾項是 119。

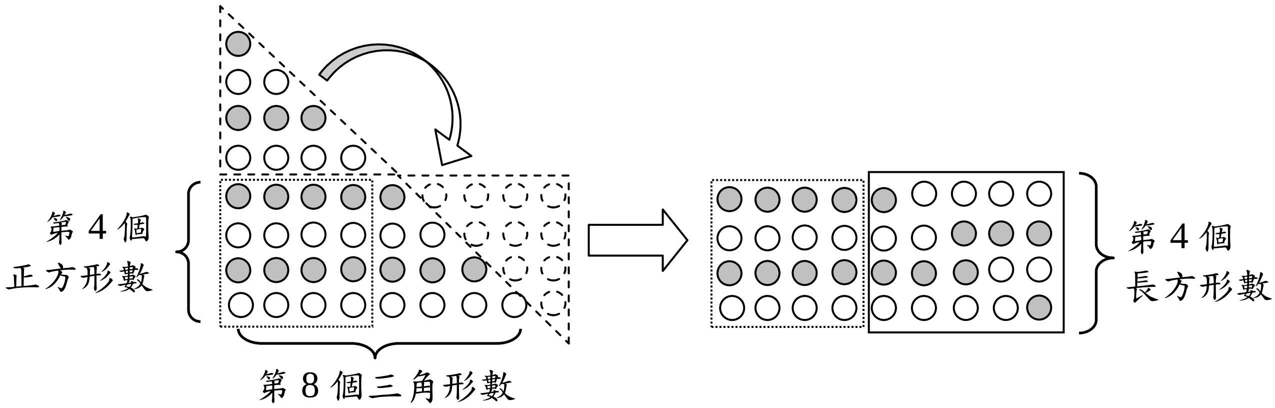
依兩年實踐所見，雖然是兩班程度不同的學生，但開始時均表現得有點不習慣，尤以第一年的學生為甚，他們對於用黑白鈕扣排出對應的點陣顯得抗拒，每節課都問：「可否不排鈕扣？」起初，教師非常堅持要求他們先排鈕扣再繪圖，經歷「數學化教學」強調的，由無到有，由粗疏變精密的演變過程。當他們經歷了約五、六張工作紙後，大概已掌握了操作過程，學生開始自動作出調節：約有三分之一的學生選擇先繪圖，再排鈕扣驗證；稍後，約三分之二的學生選擇不排鈕扣，只繪畫簡單的點陣圖來幫助思考，以完成工作紙中的一些不太困難的部分；然而，能力稍遜的學生仍然堅持先排鈕扣。這現象是令人高興的：一方面反映鈕扣的設置處理了差異的問題，學生可以按自己的需要，選擇何時借助學具；另一方面反映學生已找到一種值得信賴的方法來做學問。接著，學生可以在家完成往後部分的工作紙，舒緩了超出課時的壓力。至於第二年的學生，因為能力較高，大部分學生於五、六張工作紙後，已自動作出調節，但當遇到一些較繁複的難題，鈕扣的作用又再浮現，正如他們所說：「這袋鈕扣是旁身之物。」

當學生完整地經歷了正方形數的數學化過程後，對長方形數及三角形數的入手再不感到陌生，因此不需要像正方形數一樣地細緻鋪排，可以簡單一些。礙於課時所限，有關首項不是 2 的長方形數的難題，和首項不是 1 的三角形數的難題，均被省去，但並不代表他們少學了些（一般人均認為，教師不教，學生就不會懂）。在兩年實踐中，均有學生（雖然只是少部分）要求教師給予這類難題，尤其是「已知項數和總和，找出首項和尾項」那一題，對他們來說更是一項自我的挑戰！試問現在有多少學生會要求老師給他們難題，並追問他們的解題方法是否正確？雖然擠掉了教師的小息時間，但教學效果卻是令人異常振奮的。

不過，學生的想法有時也難以預計。在完成一張有關三角形數的工作紙期間，原意希望學生發現下列關係：

1. 當 n 是偶數時，第 n 個三角形數 = 第 $\frac{n}{2}$ 個正方形數 + 第 $\frac{n}{2}$ 個長方形數
2. 當 n 是奇數時，第 n 個三角形數 = 第 $\frac{n+1}{2}$ 個正方形數 + 第 $\frac{n-1}{2}$ 個長方形數

當 $n = 8$ 時，可以下列拼圖理解：



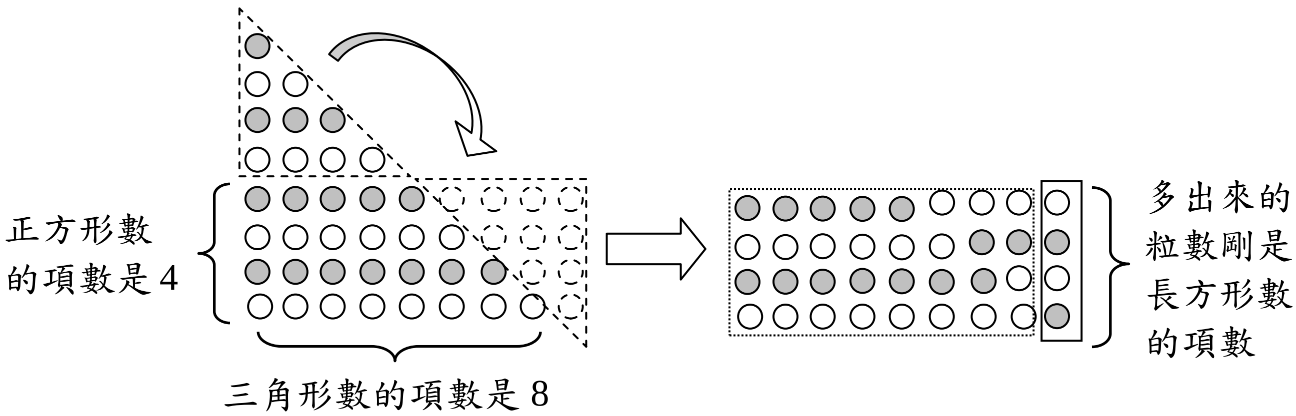
圖十三

有學生的發現竟然是這樣的：

「如果三角形數的項數是偶數，那麼
三角形數的項數 × 正方形數的項數 + 長方形數的項數 = 總點數
如果三角形數的項數是奇數，那麼
三角形數的項數 × 正方形數的項數 = 總點數」

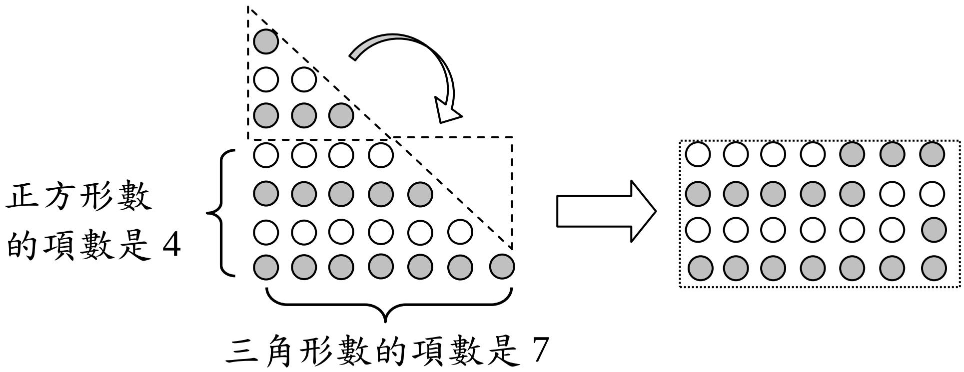
對於這個始料不及的發現，教師即場也未能迅速回應。最後，合幾位同學之力，運用點陣圖向全班解說一番，論據如下：

如果三角形數的項數是偶數，例如 8



圖十四

如果三角形數的項數是奇數，例如 7



圖十五

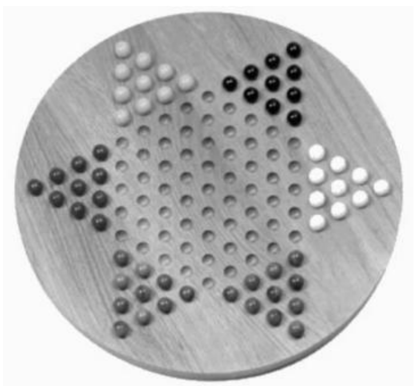
大家對這樣的解說可能覺得不大滿意，或是覺得有點兒造作。當時，有部分同學亦有同感，且不停加入意見。經過一番激烈的討論後，最終他們都能歸納出原先預定的結果。但對筆者等來說，這些結論不太重要，最重要是他們能投入討論的過程，真真正正地經歷一節形神俱備的數學課。

當學生建構了簡單數型的知識，便開始探究有關數型的其他難題，例如：

1. 第 n 個長方形數 + 第 n 個正方形數 = 第 $2n$ 個三角形數 2.兩連續長方形數之和必定是正方形數的兩倍，反之亦然
3. 三角形數 $\times 8 + 1$ 必定是正方形數；正方形數卻不一定等於三角形數 $\times 8 + 1$（哪些是？哪些不是？）
4. 三角形數 $\times 4 + 1$ 必定是兩連續正方形數之和，反之亦然

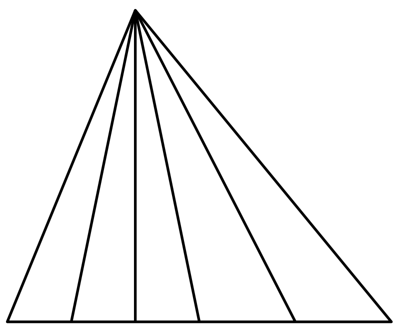
當然還有些抽象性沒那麼高的，學生們較喜歡研究的問題，例如：

5. 波子棋棋盤內有多少個孔?



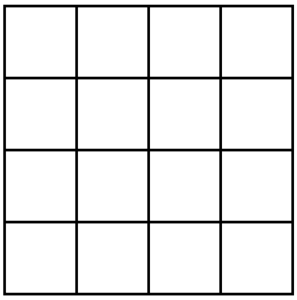
圖十六

6. 圖中包含多少個三角形?



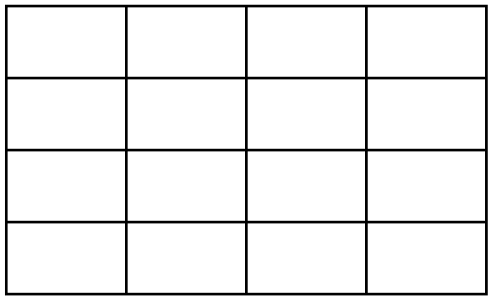
圖十七

7. 圖中包含多少個正方形?



圖十八

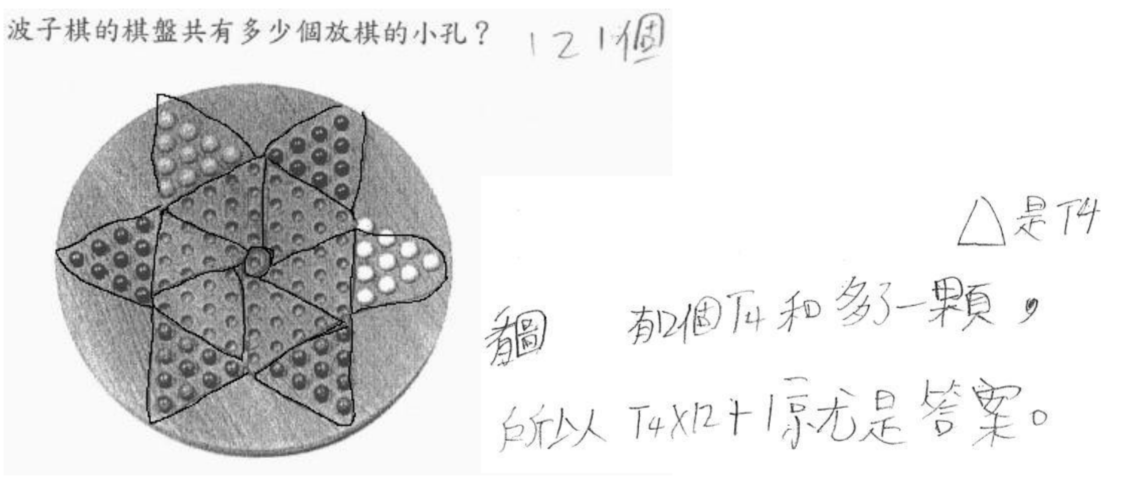
8. 圖中包含多少個長方形?



圖十九

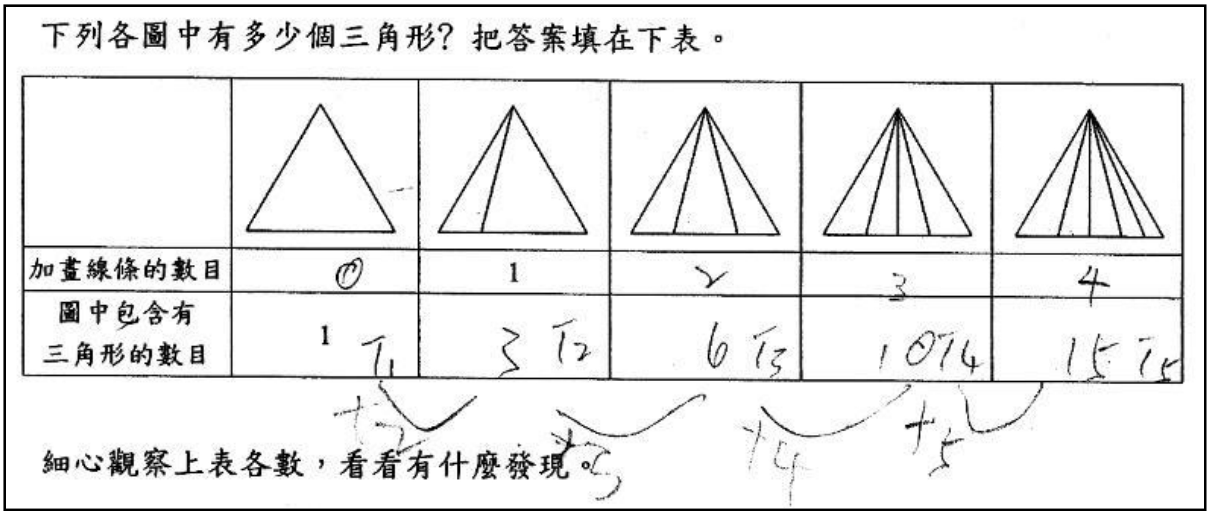
雖然預備了多份有關數型的難題習作，但教師並沒有打算全部發給學生，由於課時關係，第一年的學生只完成難題 2、3、5、6。由第一年的經驗所得，學生對於一些抽象性沒那麼高的問題較喜歡研究；另因第二年的課時比較緊迫，因此，學生只完成難題 5、6、8。

有關「波子棋棋盤內有多少個孔？」這題，兩批學生均能信心十足地完成，並且毫不猶豫地表示要向全班解說，學生的表達方式各有不同，但方法大致一樣，如下圖分割棋盤，發現數量有：12 個 T4（第四個三角形數）再加 1，所以波子棋棋盤內有 121 個孔。



圖二十

有關「圖中包含多少個三角形？」這題，第二年的學生明顯地較第一年的完成得更快，他們經過觀察後，不難發現圖中包含三角形數量 = 第（三角形內加畫線的數量 + 1）個三角形數，如下：



下列各圖中有多少個三角形？把答案填在下表。

加畫線條的數目	0	1	2	3	4
圖中包含有三角形的數目	1 T_1	3 T_2	6 T_3	10 T_4	15 T_5

+2 +3 +4 +5

細心觀察上表各數，看看有什麼發現。

圖二十一

第二年的學生中，約三分之二的學生很快便完成，且確信自己的方法是對的，並沒有用其他的方法再驗證，但當他們接觸「圖中包含多少個長方形？」這題時，雖然透過 2 × 2 方格的圖形已有發現（附件一），但仍在欠缺信心情況下，不厭其煩地硬數 3 × 3（附件二）及 4 × 4 方格的圖形（約有半班同學異口同聲要求教師不要即時講解，好讓他們有時間回家完成），以證實自己的發現。在急於求成的大氣候之下，能欣賞學生這股拼勁的教師和家長可能日見減少。相信有人會說他們很傻，既然已有發現，何不直接向老師說明，讓老師評定對錯，卻要花時間心力，自己硬數一遍？這裡必須強調，學生這份執著，顯示他們已完全投入和擁有學習的過程。對他們來說，努力完成工作已經不再是為了向老師交代，或是討個甲等成績，而是為了享受親身發掘知識的滿足感。能帶領學生走到這個境界，這兒介紹的教學設計應記一功。

結語

現在，想讀者最擔心的是課時問題，如前文所述，當學生完整地經歷了正方形數的數學化過程後，對長方形數及三角形數的入手再不感到陌生時，部分有關長方形數及三角形數的問題可以省去；另外，有關數型的難題亦可因應學生興趣及課時而選擇地使用；況且，當學生熟習有關的操作時，部分的題目可以作為家課（每個學生有一袋鈕扣帶回家使用），第二天才一起討論，這也省卻不少課時。整體而言，兩年的學生分別約完成了二十多張工作紙，所需課時約四星期，但依照舊課程課本上的建議，這個課題原也需約兩星期的課時；因此，只需將六年級下學期的課程進行簡單的

調適，便可以多撥出兩星期的課時。

在這次數型的教學實驗中，原希望學生能真正地認識和欣賞簡單的數型規律外，還可以繞過盲目背誦公式，掌握如何利用拼砌點陣圖，解決各種有關數列的問題。經歷了兩年的教學，發現學生不單能達到預期效果，且能真正體會以「形」馭「數」的精妙和樂趣；而最重的是，透過此課題的研習，學懂了如何面對數學難題？如何解決數學難題？從何入手？當然，不是每個學生的進展均是同步的。況且，這兩屆的學生均從未接觸「數學化教學」，要他們擺脫固有的壞習慣，事事要自己發現，開始時著實有點困難。然而，只要給予多點時間，筆者等發現部分學生的自學能力原來非常之高，學生（尤其是第一年的）由最初被動地去面對問題，到後來積極投入課堂上的討論，鍥而不捨地找尋方法解決問題，這種學習態度的改變，相對於只是四星期課時，收穫可謂不少。

參考資料

香港課程發展議會（2000）。《數學課程指引（小一至小六）》。香港：教育署。

馮振業（2004，6 月）。〈數學化教學：理論、實踐與前瞻〉，收入 鄧幹明、黃家樂、李文生、莫雅慈（編）《香港數學教育會議 － 2004 論文集》，78 – 88，香港大學教育學院。

首作者電郵：pansyclp@yahoo.com.hk

附件一

數數下列各圖中有多少個長方形？把答案填在下表。

圖中包含有長方形的數目	3	6	10

圖中包含有長方形的數目	3	6	10

猜猜或數數下列各圖中有多少個長方形？把答案填在下表。

圖中包含有長方形的數目	9	36	100

細心觀察以上各表，看看有什麼發現。

我的發現：

→3

→3

→3×3=9

下圖中有多少個長方形？

你是如何找出答案的？在下面方格內展示你的做法。

780　12×(12+1)÷2 ×4×(4+1)÷2

附件二

a、b、c、d、e、f、g、h、I、ab、ad、bc、be、cf、dg、de、eh、ef、fI、gh、hI、abc、def、ghI、adg、beh、cfI、abde、bcef、degh、efhI、adgbeh、behcfI、abcdefghI、abcdefdefghI = 36

a	b	c
d	e	f
g	h	I