對初等數論若干習題解題方法的探究

胡奕偉
浙江麗水學院數學系

關於數學教學（包括習題教學），張奠宙先生倡導要將數學知識的學術形態轉化爲教育形態，鄭毓信先生提出要「講懂」、「講活」、「講深」，通過對於相關內容的方法論重建（或者「再創造」）使之真正成爲「可以理解的」、「可以學到手的」和「可以加以推廣的」。

初等數論一向被認爲「理論易學、題目難做、技巧性強」，甚至「一題一法」，因此初等數論習題就面臨更多的教學法加工的任務。同時，由於初等數論的內容與技巧與中學數學具有密切的聯繫，因此初等數論習題常常被用作研究性學習與數學競賽的素材。「初等數論初步」還被列入普通高中數學選修課，—— 這是高中數學教學的一次從無到有的跨越。

茲不揣淺陋，對 5 道初等數論習題的解題方法進行探究如下，以期拋磚引玉。

1. 化難為易，化神奇為平凡

習題 1　設 $(m-p) \mid mn+pq$，試證 $(m-p) \mid (mq+np)$。

解決本問題的傳統方案是利用恆等式：$(mq+np)-(mn+pq) = q(m-p) - n(m-p)$。這個方案意味著：只有知道這個恆等式的人，才能解出這道題。或者說，解題者必須有預見地作出 $mq+np$ 減去 $mn+pq$ 的差，並能直覺地分解爲 $q(m-p)-n(m-p)$。這對於初學者顯然難以辦到。

習題 1 的傳統方案很難，就像魔術師帽子下面鑽出來的兔子，學生難以實現「再創造」。

對於習題 1，我們可以分析：解題目標就是尋找 $mq+np$ 與 $m-p$ 內在聯繫。mq 中已有 m，把 m 湊成 $m-p$，就找到 mq 與 $m-p$ 的聯繫：$mq=(m-p)q+pq$。同理，np 中已有 p，把 p 湊成 $p-m$，於是得到 np 與 $p-m$的聯繫：$np=n(p-m)+mn$。注意這裏的湊是中學數學的一個基本技巧，是結合問題自身結構的一種積極嘗試。

所以，$mq + np = (m - p)q + n(p - m) + (pq + mn)$ ....(*)

已知 $(m - p) \mid pq + mn$，所以 $(m - p) \mid mq + np$。將 (*) 變形即得：$(mq + np) - (mn + pq) = q(m - p) - n(m - p)$。傳統方案中的恆等式就是這樣得到的。

2. 尋找蘊含其中的數學模式

習題 2　若 $\phi(n) = 2200$，則 $n =$ ______ 。

這是關於歐拉函數公式的一道題。歐拉函數 $\phi(a)$ 是定義在正整數上的函數，它在正整數a上的值等於序列 0 , 1 , 2 , … , $a - 1$ 中與a互素的數的個數。當$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$（$\alpha_i > 0$，$p_i$為素數，$i = 1 , 2 , \ldots , k$）時，$\phi(a) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1})(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}) \cdots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1})$。由於本題採用逆向思維的編制方法，難度增加了。

對於一道比較一般的題，華羅庚先生說過：先足夠地退，退到我們最容易看清楚的地方，認透了，鑽深了，然後再上去。善於退，足夠地退，退到原始而不失重要性的地方，這是學好數學的一個訣竅。

歐拉函數公式蘊含多種特殊情況，條分縷析，我們得到三種最簡單的模式。

模式 1　$\phi(p) = p - 1$，p為奇素數。由於 $\phi(n) = 22 \times 100 = (23 - 1)(101 - 1)$，因此$n_1 = 23 \times 101$。

模式 2　$\phi(2) = 2 - 1= 1$。由於 $\phi(n) = 22 \times 100 = (2 - 1)(23 - 1)(101 - 1)$，因此$n_2 = 2 \times 23 \times 101$。

模式 3　$\phi(p^{\alpha}) = p^{\alpha} - p^{\alpha - 1} = p^{\alpha - 1}(p - 1)$，$p$為奇素數，$\alpha > 2$。強調$p$、$p - 1$為連續整數。由於 $\phi(n) = 22 \times 5^2 \times 4 = (23 - 1) \times [5^2(5 - 1)]$，因此$n_3 = 23 \times 5^3$，$n_4 = 2 \times 23 \times 5^3$。又由於 $\phi(n) = (11 \times 10) \times (5 \times 4) = (2 - 1) \times [11(11 - 1)] \times [5(5 - 1)]$，因此$n_5 = 11^2 \times 5^2$，$n_6 = 2 \times 11^2 \times 5^2$。

由一般公式得到三種最簡單的模式，三種最簡單的模式交叉綜合，得到全部答案。如此一例，可以體悟「數學是模式的科學」這一論斷的一個層面的含義。

3. 一題多解，交相輝映

習題 3　已知$x_i \in \mathbf{Z}$，$i = 1, 2, \ldots, n$。$6 \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n$。
求證 $6 \mid x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3$。

這是一個與自然數 n 有關的命題，可以嘗試運用數學歸納法。

讓我們先看一個運用數學歸納法證明可能發生的錯誤：

證明 1　(1) 當$n = 1$ 時，若 $6 \mid x_1$，可設$x_1 = 6m$，$m \in \mathbf{Z}$。因此，$x_1^3 = 6^3m^3$，
$\therefore 6 \mid x_1^3$。

(2) 假設$n = k$（$k > 1$）時，命題成立，即若 $6 \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_k$，則
$6 \mid x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_k^3$。

當$n = k + 1$ 時，若 $6 \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}$，我們證明
$6 \mid x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_k^3 + x_{k+1}^3$。

$\because$　$6 \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_k$，$\therefore 6 \mid x_{k+1}$，$\therefore 6 \mid x_{k+1}^3$，
$\therefore$　$6 \mid x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_k^3 + x_{k+1}^3$，即當$n = k + 1$ 時，命題成立。

因此，對於任意自然數 n，命題成立。

以上證法來自部分學生的作業。這個證法顯然違背了 $6 \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_k$中的$k$個數$x_1, x_2, \ldots, x_k$與$6 \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}$中的前$k$個數$x_1, x_2, \ldots, x_k$所用字母相同，但其所取的數值卻並不相同。爲糾正這一偏差，當$n = k + 1$ 時，必須採用不同字母表示做涉及到的數。

當$n = k + 1$ 時，若 $6 \mid x_1' + x_2' + \ldots + x_k' + x_{k+1}'$，我們證明 $6 \mid (x_1')^3 + (x_2')^3 + \ldots + (x_k')^3 + (x_{k+1}')^3$。

根據假設，$\because 6 \mid x_1' + x_2' + \ldots + (x_k' + x_{k+1}')$，
$\therefore$　$6 \mid (x_1')^3 + (x_2')^3 + \ldots + (x_k' + x_{k+1}')^3$，
而　$(x_1')^3 + (x_2')^3 + \ldots + (x_k')^3 + (x_{k+1}')^3$
$=$　$(x_1')^3 + (x_2')^3 + \ldots + (x_k' + x_{k+1}')^3 - 3(x_k')^2x_{k+1}' - 3x_k'(x_{k+1}')^2$
$=$　$[(x_1')^3 + (x_2')^3 + \ldots + (x_k' + x_{k+1}')^3] - 3x_k'x_{k+1}'(x_k' + x_{k+1}')$

$\because$　當x_k'、x_{k+1}' 中至少有一個爲偶數時，$2 \mid x_k'x_{k+1}'$，當x_k'、x_{k+1}' 均爲奇

數時，$2 \mid (x_k' + x_{k+1}')$，

$\therefore$ $2 \mid x_k'x_{k+1}'(x_k' + x_{k+1}')$，$6 \mid 3x_k'x_{k+1}'(x_k' + x_{k+1}')$，

$\therefore$ $6 \mid (x_1')^3 + (x_2')^3 + \ldots + (x_k')^3 + (x_{k+1}')^3$，即$n = k + 1$ 時，命題成立。

因此，對於任意自然數 n，命題成立。

如果改變思考的角度：3! 能整除 3 個連續整數之積，我們則有

證明 2 $\because 3! \mid (x_i - 1)x_i(x_i + 1)$，其中$i = 1, 2, \ldots, n$，

$\therefore$ $6 \mid (x_1 - 1)x_1(x_1 + 1) + (x_2 - 1)x_2(x_2 + 1) + \ldots + (x_n - 1)x_n(x_n + 1)$

$=$ $(x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$

因此，若 $6 \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n$，則 $6 \mid x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3$。

由此可見，純粹整除角度的處理，可以收到簡潔利落的效果，是習題 3 的較優解；而數學歸納法角度的處理，必須避免偷換概念的陷阱，從而增加主體處理類似問題的經驗。

4. 嚴謹推理，避免出現科學性的錯誤

習題 4 對於十進制正整數a，a^{4k+r}與a^r的末位數字一定相同，其中k為正整數，$r = 1, 2, 3, 4$。

證明 要證明a^{4k+r}與a^r的末位數字相同，只要證明$a^{4k+r} - a^r$能被 10 整除。當$a = 0, 1$ 時，顯然成立。

當$a \neq 0, 1$ 時，$a^{4k+r} - a^r = a^r(a^{4k} - 1)$

$=$ $a^r(a^4 - 1)[(a^4)^{k-1} + (a^4)^{k-2} + \ldots + 1]$

$=$ $a^r(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)M$，其中$M \in \mathbf{Z}$

$=$ $a^r(a - 1)(a + 1)[(a - 2)(a + 2) + 5]M$

$=$ $a^r(a - 1)(a + 1)(a - 2)(a + 2)M + a^r(a - 1)(a + 1) \cdot 5M$

$\because$ $(a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2)$ 是五個連續整數之積，$(a - 1)a(a + 1)$ 是三個連續整數之積，

$\therefore$ $5! \mid (a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2)$，$3! \mid (a - 1)a(a + 1)$，而 $r \geq 1$，

$\therefore$ $5! \mid a^r(a - 1)(a + 1)(a - 2)(a + 2)$，$3! \mid a^r(a - 1)(a + 1)$

$\therefore$ $10 \mid a^r(a - 1)(a + 1)(a - 2)(a + 2)$，$10 \mid 5a^r(a - 1)(a + 1)$

$\therefore$ $10 \mid a^{4k+r} - a^r$，命題得證。

對於這個習題 4 中r的取值範圍：$r = 1 , 2 , 3 , 4$ 必須特別強調$r = 4$ 不能改成$r = 0$。因為當$r = 0$ 且$a \neq 0 , 1$ 時，$(a-2)(a-1)a^r(a+1)(a+2)$ 中就沒有五個連續整數之積，當然$a^r(a-1)(a+1)$ 中也沒有連續整數之積，證明因此中斷。

所以，如果用$f_1(a^n)$ 表示十進位數字a^n的末 1 位數，把習題 4 改為：「一般地，對於十進位正整數a，有$f_1(a^{4k+r}) = f_1(a^r)$，其中 $0 \le r \le 3$，k為正整數」，就是一個錯誤的結論。

具體地，當a的個位數位為 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 且$r = 0$ 時, $f_1(a^r) = 1$ 而$f_1(a^{4k+r}) \neq 1$，所以$f_1(a^{4k+r}) \neq f_1(a^r)$。當$a$的個位數位為 0 且$r = 0$ 時，仍有$f_1(a^{4k+r}) \neq f_1(a^r)$。我們必須嚴謹推理，尤其要注意避免出現科學性的錯誤。

5. 即教證明又教猜想

習題 5 求證 $\dfrac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]} = \dfrac{(a,b,c)^2}{(a,b)\,(b,c)\,(c,a)}$ 。

結論：$[a_1 , a_2]\,(a_1 , a_2) = a_1a_2$刻劃了兩個整數的最大公約數與它們的最小公倍數之間的關係，我們可以說，兩個整數的最大公約數與最小公倍數之間具有一種「對稱」關係。

在證明了結論 (1) $[a , b , c]\,(ab , bc , ca) = abc$、(2) $[a_1 , a_2 , \ldots , a_n] = [[a_1 , a_2 , \ldots , a_k] , [a_{k+1} , \ldots , a_n]]$、(3) $[a , b , c]\,[ab , bc , ca] = [a , b]\,[b , c]\,[c , a]$ 之後利用所說的「對稱」關係，類比得到猜想 (1) $(a , b , c)\,[ab , bc , ca] = abc$、(2) $(a_1 , a_2 , \ldots , a_n) = ((a_1 , a_2 , \ldots , a_k) , (a_{k+1} , \ldots , a_n))$、(3) $(a , b , c)\,(ab , bc , ca) = (a , b)\,(b , c)\,(c , a)$，進而通過邏輯證明，獲得確認。

在這樣的背景之下，我們自然而然地得到兩種互為相反的解決習題 5 的思路。

思路 1 從左到右，最小公倍數的代數式都轉化為最大公約數的代數式。由於 $[a , b , c] = \dfrac{abc}{(ab,bc,ca)}$，$[a , b] = \dfrac{ab}{(a,b)}$，$[b , c] = \dfrac{bc}{(b,c)}$，$[c , a] = \dfrac{ca}{(c,a)}$。要證明習題 5，只要證明 $\dfrac{a^2b^2c^2}{(ab,bc,ca)^2}\cdot\dfrac{(a,b)(b,c)(c,a)}{ab\cdot bc\cdot ca} =$

$$\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}$$，即 $$\frac{(a,b)(b,c)(c,a)}{(ab,bc,ca)^2}=\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}$$。即只要證明 $(a , b , c)\ (ab , bc , ca) = (a , b)\ (b , c)\ (c , a)$，這就是猜想 (3)。

思路 2　從右到左，最大公約數的代數式都轉化為最小公倍數的代數式。由於 $(a , b , c) = \frac{abc}{[ab,bc,ca]}$，$(a , b) = \frac{ab}{[a,b]}$，$(b , c) = \frac{bc}{[b,c]}$，$(c , a) = \frac{ca}{[c,a]}$。要證明習題 5，只要證明 $$\frac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]}=\frac{a^2b^2c^2}{[ab,bc,ca]^2}\cdot\frac{[a,b][b,c][c,a]}{ab\cdot bc\cdot ca}$$，即 $$\frac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]}=\frac{[a,b][b,c][c,a]}{[ab,bc,ca]^2}$$。即只要證明 $[a , b , c]\ [ab , bc , ca] = [a , b]\ [b , c]\ [c , a]$，這就是上述的結論 (3)。

原來這些數學結論竟然是蘑菇狀成堆生長的。

發展數學問題解決的能力，固然是數學教學追求的重要目標，而提出數學猜想的能力（比如這裏的類比）的培養，更是數學素質教育的題中應有之義。

參考文獻：

1. 中華人民共和國教育部。《普通高中數學課程標準（實驗）》。人民教育出版社，2003 年 4 月第 1 版。
2. 張奠宙。「關於數學知識的教育形態」。《數學通報》，2001 年 5 月。
3. 鄭毓信。《數學方法論》。廣西教育出版社，2001 年 11 月第 2 版。
4. 于秀源、瞿維建。《初等數論》。山東教育出版社，2004 年 4 月第 1 版。
5. 葉景梅等。《數論簡明教程》。寧夏人民出版社，1998 年 8 月第 1 版。
6. 余無希、田萬海、毛宏德。《初等代數研究》（上冊）。高等教育出版，1988 年第 1 版。
7. 王遠征。「利用計算器探索正整數冪的末位元數變化規律」。《數學通報》，2004 年 9 月。

聯絡地址：淅江麗水學院數學系　323000