阿波羅尼奧斯問題的解答（上）

梁子傑
香港道教聯合會青松中學

在參考書 [1] 第 151 頁中，該書作者提出了這道問題：「給出三個固定圓，找與這三個圓都相切的圓。」起初以為這是一道尺規作圖題，可是作者祇是在下一頁中展示了該問題的 8 個可能解答，並沒有寫出那 8 個圓的作圖方法。實在有點令人失望。

為此，搜尋了一些圖書，結果在參考書 [2] 中（117 頁），得知這是一道著名的尺規作圖題，最初是由古希臘數學家阿波羅尼奧斯（Appollonius of Perga; 260 B.C. – 190 B.C.）提出的。在 125 頁，作者應用了坐標幾何的技巧，從理論上證實了這問題是可解的。在 161 頁，作者提出以「反演（inversion）」來解這問題。雖然這方法理論上是行得通的，但是步驟實在太多和太複雜，曾經嘗試利用互動幾何軟件來作圖，結果都未能成功。

不過，作者在 117 頁中亦指出，阿波羅尼奧斯問題中的一些圓是可以退化成點或直線的。因此，原問題便可以演變成一些較為「簡單」的情況，例如：「求作一圓相切於兩已知直線並且通過一已知點。」

現以「圓、圓、圓」表示阿波羅尼奧斯的原本問題，以「點、線、線」表示上述的「退化問題」。以「點、點、點」表示「求作一圓通過已知三點」這問題。其餘類推。數一數，不難發現，「點、點、點」、「點、線、線」、「圓、圓、圓」 … 等，一共可以演變出 10 個作圖題。問題是，除了反演之外，還有沒有別的方法來解這些問題呢？

經朋友推薦，發現在參考書 [3] 中，作者應用了一些高中學生可以掌握的原理，成功地解決了「點、點、圓」、「點、圓、圓」和「圓、圓、圓」三個問題。按照類似的原理，我亦找到其餘幾個「退化問題」的作圖法。經互動幾何軟件的試驗，證實這些方法是行得通的。

參考書 [3] 的作者用詞精簡，對於一般學生來說，卻略為難懂了一點。故此利用以下篇幅，對該書的方法，為大家寫一個注釋。至於其餘幾個「退化問題」的作圖法，則將於下期發表，亦留一點時間，先讓各讀者自行探索和研究。

點、點、點

分析

解作圖題的一個重要技巧，就是先假設該圖是可以作出來的，然後分析該圖上的一些幾何性質，從而找出作圖方法的線索。由於目前要作一個圓，因此便要確定該圓的圓心位置和半徑大小了。

現在假設已知三點分別為 A、B 和 C，並且有一圓通過這三點，如圖一。若 O 為該圓的圓心，則 $OA = OB = OC$。留意 OAB 為一等腰三角形，頂點 O 必定位於底邊 AB 的垂直平分線上（詳細證明留給讀者完成）。同理，O 亦位於 BC 的垂直平分線上。所以 O 就是 AB 和 BC 垂直平分線的交點。換言之，祇要畫出上述兩條垂直平分線，圓心的位置便可以確定。同時，祇要確定了 O 的位置，那麼圓半徑的大小亦可從 OA、OB 或 OC 而獲得。

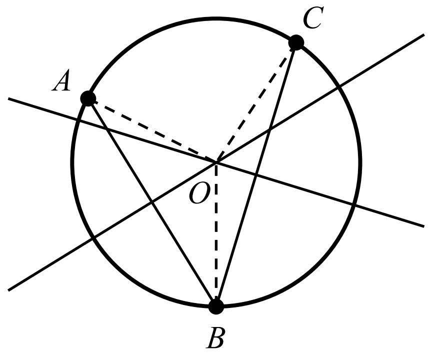


圖　一

作圖步驟

已知 A、B 和 C 三點。

1. 作 AB 的垂直平分線（以尺規畫垂直平分線的方法則留給讀者研究）。
2. 作 BC 的垂直平分線。稱兩垂直平分線的交點為 O。
3. 以 O 為圓心，OA 為半徑畫圓。這就是所求作的圓。

點、點、圓

分析

圖二中，A、B 為已知點，C_1 為已知圓。現要作圓 C_2，使它通過 A 和 B 並且與 C_1 相切。設兩圓的交點為 D。為了分析點與圓之間的關係，連結並延長 AB。由於 D 是兩圓的切點，因此亦繪出通過 D 點的切線。設切線與 AB 交於 P。

這時候，令人聯想起以下兩個與圓、截線和切線有關的著名定理：

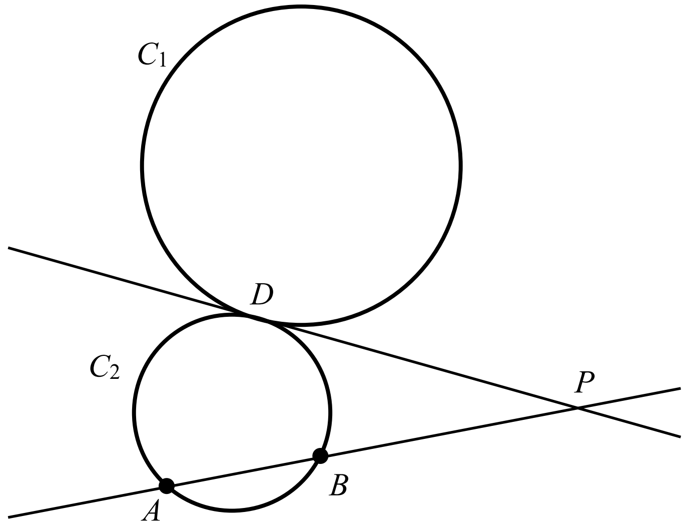


圖　二

定理一（圓冪定理）　設 A、B、C、D 為圓上四點，P 為圓外一點，分別使 PAB 和 PCD 成直線（如圖三），則 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$。

定理二　設 A、B、C 為圓上三點，P 為圓外一點，使 PAB 成直線，而 PC 為圓的切線（如圖四），則 $PA \cdot PB = PC^2$。

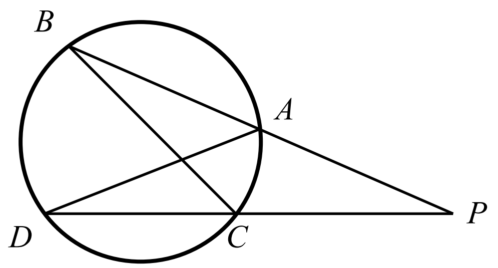


圖　三

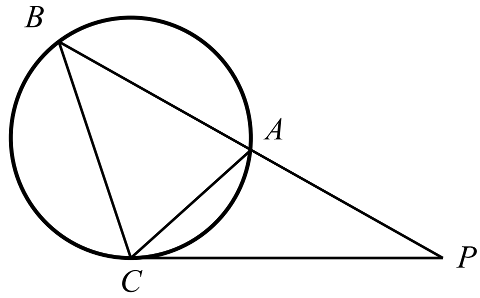


圖　四

定理一和定理二的證明都不難。圖三中，由圓周角的性質不難證明 $\Delta PCB \sim \Delta PAD$。因此有 $\dfrac{PB}{PD} = \dfrac{PC}{PA}$，即 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$。類似地，圖四中，由弦切角的性質可知 $\Delta PCB \sim \Delta PAC$。因此有 $PA \cdot PB = PC^2$。

事實上，定理一和定理二的逆定理也是成立的。即已知 PAB 和 PCD 為兩直線，並且 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$，則 A、B、C、D 四點共圓。又若 PAB 為一直線，並且 $PA \cdot PB = PC^2$，則 PC 為圓 ABC 的切線。這兩個逆定理的證明亦不難，祇要將上述證明的推理倒轉做一次便可以。在此從略。

回看圖二，現在要找出確定圓 C_2 的條件。由於 C_2 通過 A 和 B，而 A、B 都是已知的，因此衹要能夠確定 D 點的位置，便可以按前面「點、點、點」的方法作 C_2。但由於 DP 是 C_2 的切線，因此衹要知道 P 點的位置，便可以確定 D 的位置了（繪畫切線的方法，將會在下文中解釋）。但 P 點又如何確定呢？

為了找出 P 點，在 C_1 上隨意選一點 E，連結 PE 成為圖五。

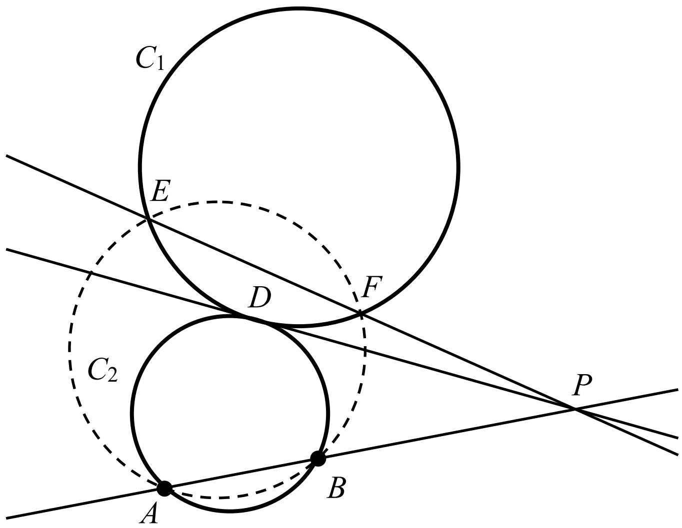


圖　五

假設 PE 不是 C_1 的切線，那麼它必定與 C_1 再交於另一點。稱該點為 F。由定理二可知 $PA \cdot PB = PD^2 = PE \cdot PF$。又由定理一的逆定理可知，$A$、$B$、$E$、$F$ 四點共圓，如圖五。

注意：A 和 B 是已知的固定點，E 是在 C_1 上的一點，F 則是圓 ABE 和圓 C_1 的交點。換言之，衹要 E 的位置不變，那麼可以利用圓 ABE 和 C_1 的交點來確定 F 的置位。由於 P 是 AB 和 EF 延長線的交點，因此 P 的位置也隨之而確定了！

還有一個問題必須解決，就是如何繪畫圖五中的切線 PD 呢？

圖六中，C 為一已知圓，O 為該圓的圓心，P 為圓外一點。若 D 為圓上一點使 PD 成為切線，那麼 $\angle ODP = 90°$。由於半圓上的圓周角是直角，因此衹要以 OP 為直徑作一圓（圖六中的虛線部分），那麼由兩圓的交點便可以確定 D 的位置，連結 PD 便可以得到切線了。

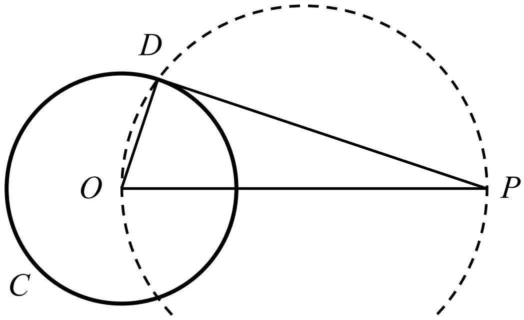


圖　六

作圖步驟

已知 A、B 兩點及圓 C_1。設 O 為 C_1 的圓心。

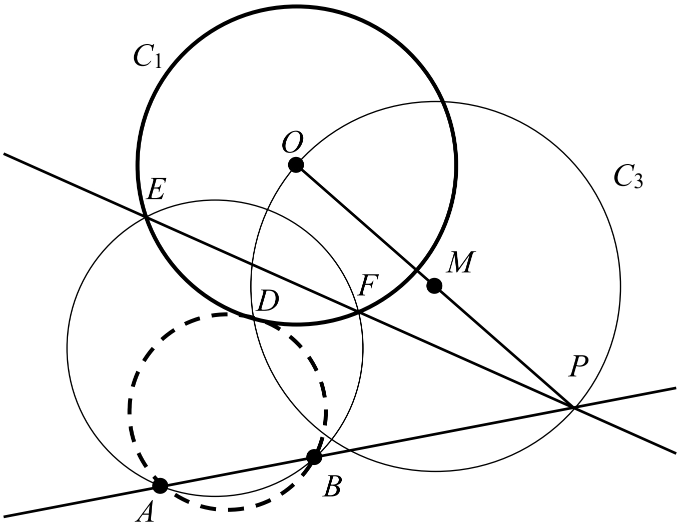


圖　七

1. 在 C_1 上隨意選一點 E。按前面「點、點、點」的步驟作圓 ABE。稱圓 ABE 與圓 C_1 的另一交點為 F。
2. 連結並延長 EF。
3. 連結並延長 AB。稱 AB 和 EF 的交點為 P。
4. 連結 OP 並稱 OP 的中點為 M。
5. 以 M 為圓心，MO 為半徑畫圓 C_3。稱 C_3 與 C_1 的交點為 D。
6. 按前面「點、點、點」的步驟作圓 ABD。這就是所求作的圓。

補充說明

1. 圖七中，C_3 與 C_1 其實有兩個交點。若取另一交點為 D，則所作的圓將與 C_1 內切，如圖八。換言之，「點、點、圓」一共有 2 個解。

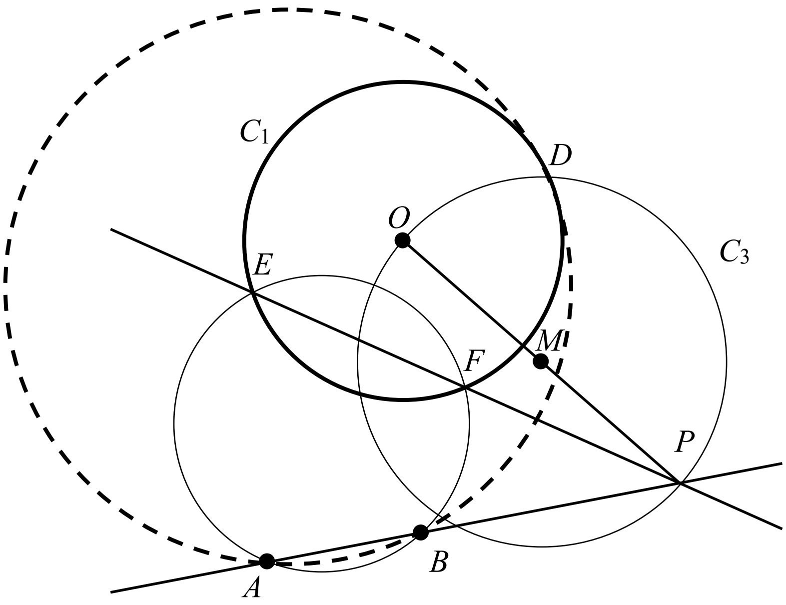


圖　八

2. 若作圖時發現 E 與 F 重合，那麼圓 ABE 就是所求作的圓了！

3. 若 $EF // AB$，即 P 不存在，則可將 EF 的中點和 AB 的中點連結，並將該連線與 C_1 的交點設定為 D，圓 ABD 就是所求作的圓（此部分證明留給讀者完成）。

點、圓、圓

分析

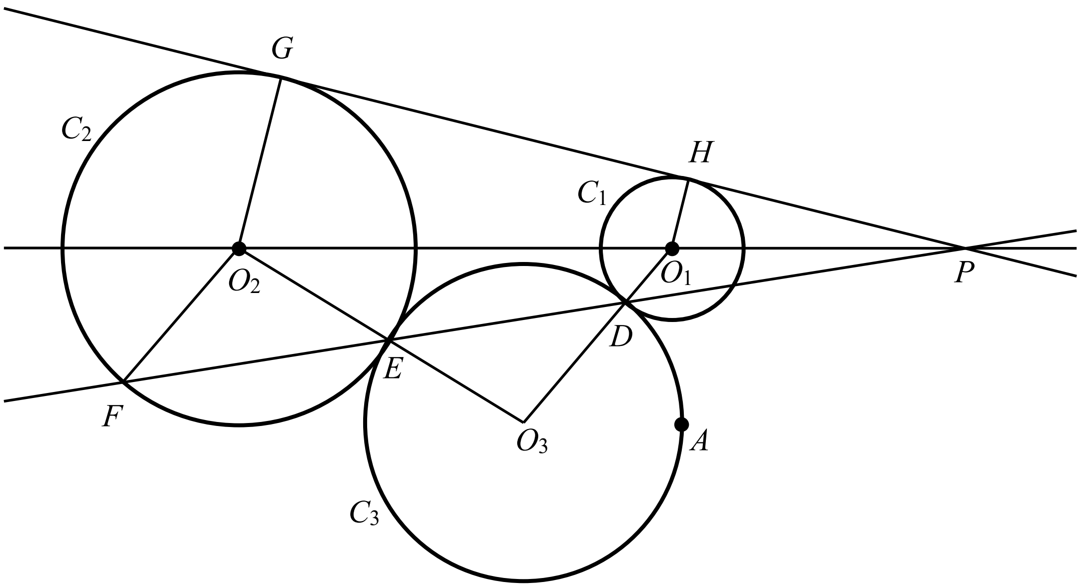


圖　九

圖九中，A 為已知點，C_1、C_2 為已知圓。現要作圓 C_3，使它通過 A 並且與 C_1 和 C_2 相切。設 O_1、O_2 和 O_3 分別為 C_1、C_2 和 C_3 的圓心，C_1 與 C_3 相切於 D，C_2 與 C_3 相切於 E。

又設 O_1O_2 與 DE 的交點為 P。若從 P 引一直線 PH 切圓 C_1 於 H，那麼不難從圖九中觀察得，PH 的延長線亦與圓 C_2 相切，即 C_1 和 C_2 的公切線同樣通過 P 點！這是一個非常難得的現象，但為甚麼會發生呢？

稱公切線與 C_2 的交點為 G，又稱 ED 與 C_2 的另一交點為 F。由切線的性質可知 $GO_2 // HO_1$。易證 O_2、E、O_3 和 O_1、D、O_3 分別共線，因此由等腰三角形底角和對頂角性質可知 $\angle O_2FE = \angle O_2EF = \angle O_3ED = \angle O_3DE = \angle O_1DP$，即 $O_2F // O_1D$。

現要證明公切線 GH 與 O_1O_2 同樣交於 P(即同樣交於 O_1O_2 與 DE 的交點)。先假設 GH 與 O_1O_2 相交於 P'。由於 $GO_2 // HO_1$，因此 $\Delta P'HO_1 \sim \Delta P'GO_2$，得 $\dfrac{O_1H}{O_2G} = \dfrac{P'O_1}{P'O_2}$。類似地，由 $O_2F // O_1D$ 得 $\dfrac{O_1D}{O_2F} = \dfrac{PO_1}{PO_2}$。但是 $O_1H = O_1D$，$O_2G = O_2F$，所以 $\dfrac{P'O_1}{P'O_2} = \dfrac{PO_1}{PO_2}$。由於 P 和 P' 同樣位於 O_1O_2 之上，因此 P 和 P' 重合，即 GH 與 O_1O_2 同樣交於 P。

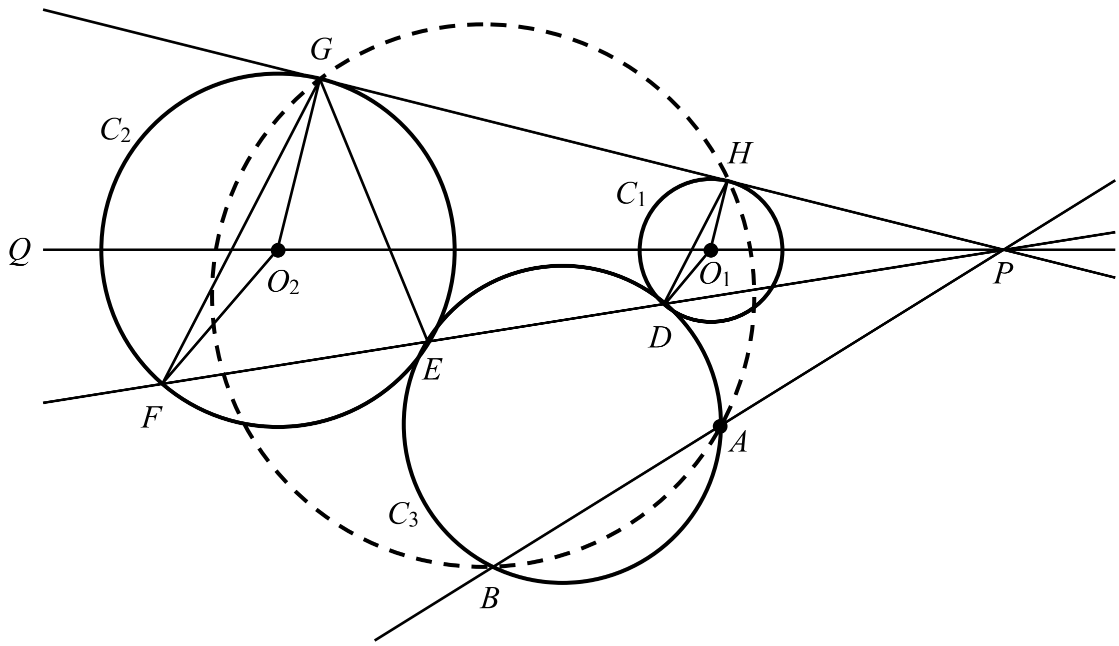


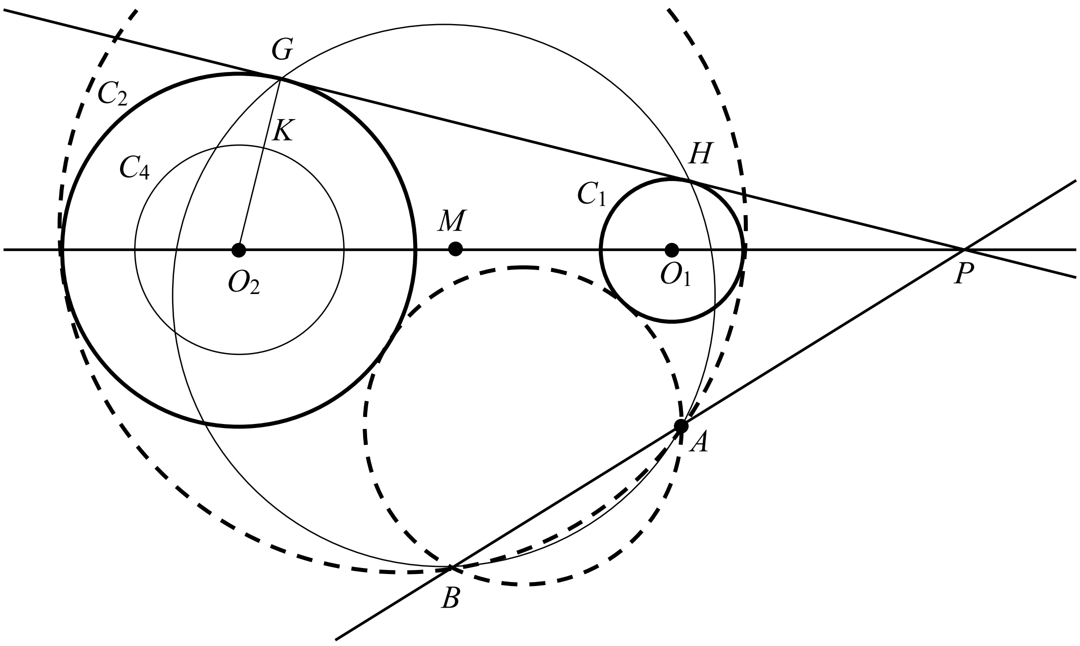
圖 十

得知 GH、O_1O_2、DE 三線共點後，便應利用這結果作進一步分析。現將圖九複製至圖十，刪去了一些較次要的線段，但連結起 GF、GE 和 HD。留意 $\angle QO_2G = \angle O_2O_1H$（同位角；$GO_2 // HO_1$），$\angle QO_2F = \angle O_2O_1D$（同位角；$O_2F // O_1D$），即 $\angle GO_2F = \angle HO_1D$。又因為 O_2GF 和 O_1HD 同是等腰三角形，所以 $\angle O_2GF = \angle O_1HD$，$GF // HD$。由此得 $\angle HGE = \angle GFE = \angle HDP$。換言之，$H$、$G$、$E$、$D$ 四點共圓。利用前面提過的定理一得 $PH \cdot PG = PD \cdot PE$。

若將 PA 連結，並設 PA 再交 C_3 於 B，則 $PD \cdot PE = PA \cdot PB$。結合前面的結果得 $PH \cdot PG = PA \cdot PB$。所以由定理一的逆定理得 A、B、G、H 四點共圓！換言之，未知圓 C_3 上另一點 B 可以由圓 AGH 和直線 PA 的交點所確定！知道 B 的位置之後，便可以按「點、點、圓」的步驟作通過 A、B 兩點，並且與圓 C_1 相切的圓。而這個圓亦和 C_2 相切，即這是所求作的圓！

作圖步驟

已知 A 點及兩圓 C_1 和 C_2。設 O_1 為 C_1 的圓心，O_2 為 C_2 的圓心。C_2 的半徑大於 C_1。



圖十一

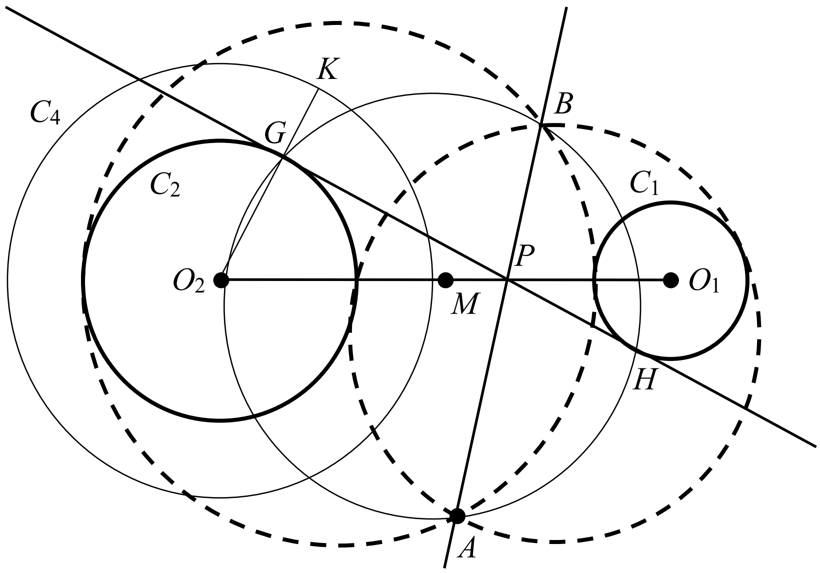
1. 以 O_2 為圓心，C_2 半徑與 C_1 半徑之差為半徑，作圓 C_4。
2. 連結 O_1O_2。
3. 作線段 O_1O_2 的中點，並稱之為 M。

4. 以 M 為圓心，MO_2 為半徑作圓（此圓未有在圖十一中繪出）。稱這圓與 C_4 的交點為 K（注意：因為 $\angle O_1KO_2 = 90°$，所以 O_1K 為圓 C_4 的切線）。
5. 延長 O_2K 使它與 C_2 交於 G。
6. 通過 G 作直線垂直於 O_2G，並稱這直線與 C_1 的交點為 H（GH 是 C_1 和 C_2 的公切線）。
7. 延長 GH 和 O_1O_2 使它們相交於 P。
8. 按前面「點、點、點」的步驟作圓 AGH。
9. 連結 AP 並使它與圓 AGH 相交於 B。
10. 按前面「點、點、圓」的步驟作通過 A、B 兩點，並且與 C_1 相切的圓。這就是所求作的圓。

<u>補充說明</u>

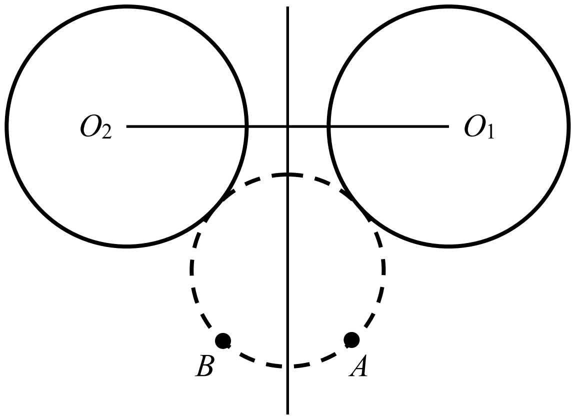
1. 由於「點、點、圓」有 2 個解，因此圖十一中顯示了 2 個圓。

2. 若將 C_4 的半徑設定為 C_2 半徑與 C_1 半徑之和，則可構作出另外 2 個解，見圓十二。總括得「點、圓、圓」共有 4 個解。



圖十二

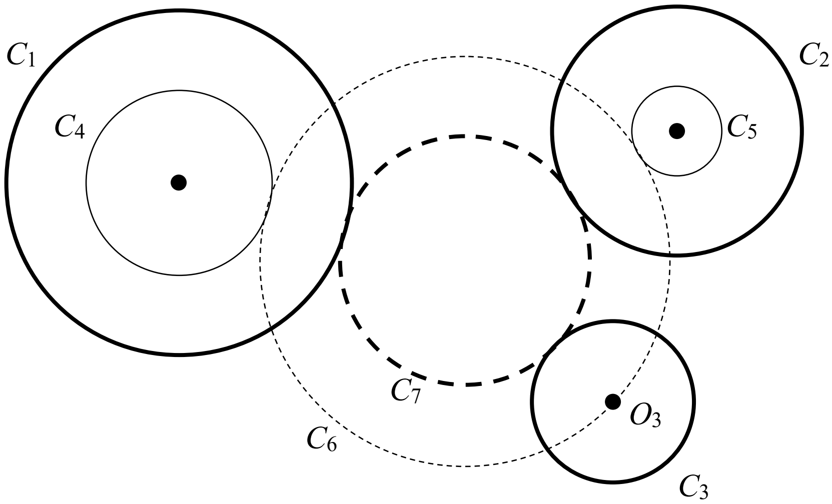
3. 若 C_1 和 C_2 半徑相等，則圖十一中的公切線 GH 不會和 O_1O_2 相交。但這時候可以將 O_1O_2 的垂直平分線設定成反射對稱軸，將 A 反射至對稱軸的另一側，成為 B 點。同樣按「點、點、圓」的步驟亦可作出所求作的圓（如圖十三）。



圖十三

圓、圓、圓

分析及作圖步驟



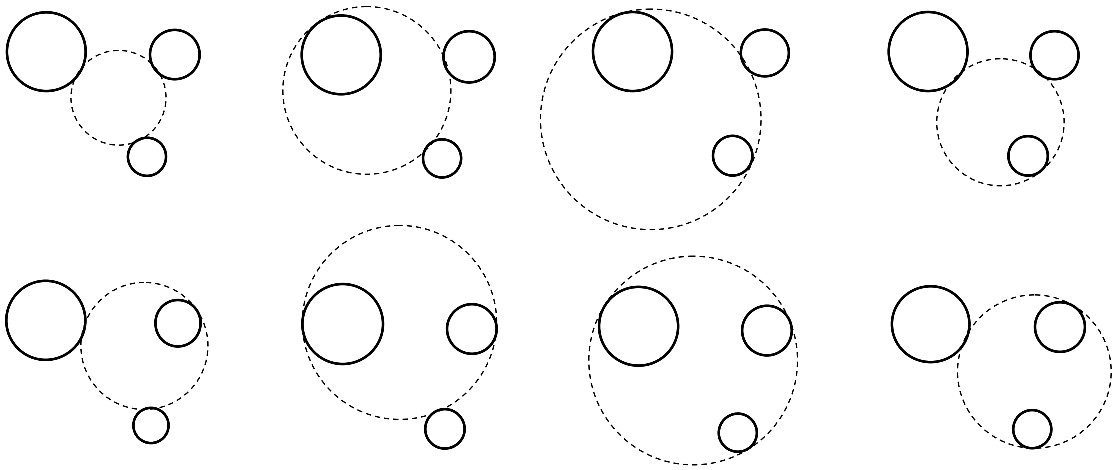
圖十四

圖十四中， C_1、C_2、C_3 為已知圓，現要作圓與 C_1、C_2、C_3 相切。假設 C_3 的半徑最小，那麼將 C_3 退化至圓心一點 O_3。C_1 和 C_2 的半徑亦按 C_3 的半徑減小，成為 C_4 和 C_5。按前面「點、圓、圓（圖十一）」的步驟作圓 C_6，使它通過 O_3，並與 C_4 和 C_5 相切。亦將 C_6 的半徑按 C_3 的半徑減小，得 C_7。C_7 就是所求作的圓。

留意「點、圓、圓（圖十一）」共有 2 個解，而圖十四衹展示了其中一個解同時外切於 C_4 和 C_5 的 C_6，而由 C_6 所得的 C_7 則同時外切於 C_1、C_2 和 C_3。至於「點、圓、圓（圖十一）」的另一個解，它會內切於 C_4 和 C_5，而由它構作出的一個圓，則會同時內切於 C_1、C_2 和 C_3（詳情留給讀者驗證）。又，若以「點、圓、圓（圖十二）」的步驟作圓，所得的 2 個解雖然都與

C_4和 C_5相切，但卻不能由此作圓，使它同時相切於 C_1、C_2和 C_3（詳情亦留給讀者驗證）。總括而言，按圖十四的作圖步驟，可得 2 個解。

事實上，當 C_3退化至圓心一點 O_3時，不一定要好像圖十四般，將 C_1和 C_2的半徑按 C_3的半徑減小；其實亦可將兩圓的半徑，按 C_3的半徑增加，或增加其中一個圓的半徑，同時減小另一個。留意這共有 4 個組合，而每個組合衹可按「點、圓、圓（圖十一）」或「點、圓、圓（圖十二）」的步驟構作 2 個不同的圓（詳情亦留給讀者驗證），因此「圓、圓、圓」共有 8 個解，見圖十五。



圖十五

小結

阿波羅尼奧斯問題是尺規作圖上的一個難題，作圖的步驟亦頗繁複。但回看上述的解答，最深奧的理論，亦衹不過是圓冪定理，肯在這方面鑽研的學生應可以理解，因而非常值得和學生討論。同時這問題亦可反映出「四點共圓」、「圓冪定理」等課題的重要性。

至於其餘 6 個「退化問題」，則留待下期再作討論。

參考書目

[1] 張奠宙、戴再平（編）（1997）。《生活中的中學數學》。台北：九章出版社（本書原本由華東師範大學出版社於 1996 年出版，原名為《中學數學問題集》）。

[2] Courant, R., Robbins, H. (1941). *What is Mathematics?*. New York: Oxford University Press.

[3] 梅向明、周春荔（2000）。《尺規作圖話古今》。長沙：湖南教育出版社。

作者電郵：jckleung@netvigator.com