構造行列式解「牛頓公牛吃草問題」

于志雄、朱靜
江蘇省泰州外國語學校

英國著名的數學家、物理學家、哲學家，人類屈指可數的大科學家之一 —— 牛頓（Newton，1642 – 1727）在他的數學著作《廣義算術》（1707年出版）中，曾記載下面一個史稱「牛頓公牛吃草」的問題：

題 1　有三片牧場，場上的草是一樣的密，而且長得一樣快。它們的面積分別是 $3\frac{1}{3}$ 公頃、10 公頃和 24 公頃。第一片牧場飼養 12 頭牛可以維持 4 個星期；第二片牧場飼養 21 頭牛可以維持 9 個星期。問在第三片牧場上飼養多少牛恰好可以維持 18 個星期？

這道世界名題的解法眾多，今運用「三元齊次線性方程組有非零解的充要條件是它的係數行列式爲零」的定理，對其進行巧思妙解。

解　設每公頃原有草 x 千克，每星期每公頃生長新草 y 千克，第三片牧場可飼養 z 頭牛，每頭牛每星期吃草 a 千克，則依題意，得：

$$\begin{cases} 3\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}\times 4y = 12a\times 4 \\ 10x + 10\times 9y = 21a\times 9 \\ 24x + 24\times 18y = 18a\times z \end{cases}，即 \begin{cases} 10x + 40y - 144a = 0 \\ 10x + 90y - 189a = 0 \\ 4x + 72y - 3za = 0 \end{cases}$$

這是一個以 x、y、a 爲未知數的三元齊次線性方程組，因爲它有非零解，所以係數行列式 $D = \begin{vmatrix} 10 & 40 & -144 \\ 10 & 90 & -189 \\ 4 & 72 & -3z \end{vmatrix} = 0$。

展開，得 $z = 36$。即在第三片牧場上飼養 36 頭牛，恰好可以維持 18 個星期。

「牛頓公牛吃草問題」影響十分廣泛，在中考和中小學數學競賽中，常常以各種變換形式出現，例如 1987 年全國部分省、市初中數學通訊賽試卷中有如下一道試題：

題 2　有一片牧場，草每天都在均速地生長（草每天增長的量相等），如果放牧 24 頭牛，則 6 天吃完牧草；如果放牧 21 頭牛，則 8 天吃完牧草，設每頭牛每天吃草的量相等，求：

(1)　如果放牧 16 頭牛，幾天可以吃完牧草？

(2)　要使牧草永遠吃不完，至多放牧幾頭牛？

解　(1)　設這片牧場原有草量爲 a，每天生長的草量爲 b，每頭牛每天吃草量爲 c，16 頭牛在 x 天內可以吃完牧草，則依題意，得：

$$\begin{cases} a+6b=6\times 24c \\ a+8b=8\times 21c \\ a+xb=16xc \end{cases}，即 \begin{cases} a+6b-144c=0 \\ a+8b-168c=0 \\ a+xb-16xc=0 \end{cases}$$

這是一個關於 a、b、c 爲未知數的三元齊次線性方程組，因爲它有非零解，所係數行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 6 & -144 \\ 1 & 8 & -168 \\ 1 & x & -16x \end{vmatrix}=0$。展開，得 $x=18$。

(2)　設至多放牧 y 頭牛，牧草才永遠吃不完，那麼 $cy\le b$，$\therefore\ y\le \dfrac{b}{c}$，即 $y\le 12$。

注：由第二個方程減去第一個方程，得 $2b=24c$，$\therefore\ b=12c$，$\dfrac{b}{c}=12$。

「牛頓公牛吃草」問題還有如下的推廣：

題 3　a頭母牛將b塊地上的牧草在c天內吃完；a_1頭母牛將b_1塊地上的牧草在c_1天內吃完；a_2頭母牛將b_2塊地上的牧草在c_2天內吃完。假設每塊地上原有草量相同，每塊地上每日長草量相同，每頭母牛每日吃草量相同，試求a、b、c、a_1、b_1、c_1、a_2、b_2、c_2 這 9 個數的關係。

解　設每塊地原有牧草量爲 x，每塊地每日長草量爲 y，每頭牛每日吃草量爲 z，則有 $\begin{cases} bx+cby-caz=0 \\ b_1x+c_1b_1y-c_1a_1z=0 \\ b_2x+c_2b_2y-c_2a_2z=0 \end{cases}$

這是一個關於 x、y、z 為未知數的三元齊次線性方程組，因爲它有非零解，所係數行列式 $D = \begin{vmatrix} b & cb & -ca \\ b_1 & c_1b_1 & -c_1a_1 \\ b_2 & c_2b_2 & -c_2a_2 \end{vmatrix} = 0$。

展開，即得$b_1bc_2a_2(c_1 - c) = b_2cc_1(ab_1 - ba_1) + c_2b_2(bc_1a_1 - b_1ca)$。

「牛頓公牛吃草」問題還以「抽水」問題出現在各類中考及數學競賽中，現舉兩例說明：

題 4　有一水池，池底有泉水不斷湧出，要將滿池的水抽乾，用 12 台泵需 5 小時，用 10 台泵需 7 小時，問要在 2 小時內抽乾，至少需要幾台水泵？（2003 年慶陽市中考題）

解　設開始抽水時，滿池水的水量為 x，泉水每小時湧出的水量為 y，每台水泵每小時抽水量為 z，2 小時抽乾滿池的水需要 n 台水泵，則依題意，得

$$\begin{cases} x+5y=5\times12z \\ x+7y=7\times10z \\ x+2y=2nz \end{cases}，即 \quad \begin{cases} x+5y-60z=0 \\ x+7y-70z=0 \\ x+2y-2nz=0 \end{cases}$$

這是一個關於 x、y、z 為未知數的三元齊次線性方程組，因爲它有非零解，所係數行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -60 \\ 1 & 7 & -70 \\ 1 & 2 & -2n \end{vmatrix} = 0$。展開，得 $n = 22.5$。

而由題設知，$n > 22.5$（n 為正整數），所以 $n = 23$。可見至少需要 23 台水泵，才能在 2 小時內抽乾。

題 5　江堤邊一洼地發生了管湧，江水不斷地湧出，假定每分鐘湧出的水量相等，如果用兩台抽水機抽水，40 分鐘可抽光；如果用 4 台機抽水，16 分鐘可抽光。如果要在 10 分鐘內抽完水，那麼至少需要抽水機幾台？（1999 年全國初中數學競賽題）

解　設開始抽水前管湧已經湧出的水量為 a 立方米，管湧每分鐘湧出的水量為 b 立方米，每台水泵每分鐘可抽水為 c 立方米（$c \neq 0$），由此再設 x 台

抽水機抽空需 t 分鐘，則依題意，

$$\begin{cases} a+40b=2\times 40c \\ a+16b=4\times 16c \\ a+\ \ tb=xtc \end{cases}，即 \begin{cases} a+40b-80c=0 \\ a+16b-64c=0 \\ a+\ \ tb-\ xtc=0 \end{cases}$$

這是一個關於 a、b、c 為未知數的三元齊次線性方程組，因為它有非零解，所係數行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 40 & -80 \\ 1 & 16 & -64 \\ 1 & t & -xt \end{vmatrix}=0$。

$\because t\le 10$，$\therefore \dfrac{160}{3x-2}\le 10$，解之得 $x\ge 6$。所以如果要在 10 分鐘內抽完水，至少需要抽水機 6 台。

綜上所述，應用上述定理解「牛頓公牛吃草」問題及其變式「抽水」問題，其關鍵在於，首先根據應用問題的題列出三個未知數的三元線性方程組，然後再根據方程組有非零解，列出三階行列式，最後展開三階行列式求得結果，此法新穎別緻，富有規律，值得介紹。

附練習題

1. 一個水池底部有水不斷湧出。2 台抽水機 40 小時抽乾，4 台抽水機 16 小時抽乾。要在 10 小時內抽完，至少要多少台抽水機？（答：6 台）
2. 設牧場的青草長速度同。如果 70 頭牛 20 天吃完原有的草和生長起來的草，如果 30 頭牛 60 天能吃完，問多少頭牛 96 天吃完。（答：23 頭牛）
3. 在一滿水池中，池底有泉總能均勻地向外湧流，已知用 24 部 A 型抽水機 6 天可抽乾池水，若用 21 部 A 型抽水機 8 天可抽乾池水。設每部抽水機位時間的抽水量相同。要使這一池水永抽不乾，則至多用多少部 A 型抽水機抽水？（1997 年第八屆「希望」盃全國數學邀請賽初一第二試題）（答：12）

聯絡地址：江蘇省泰州市森南新村 15 棟 103 室（郵遞編號：225300）