利用三角形面積證明高中解析幾何中的兩道公式

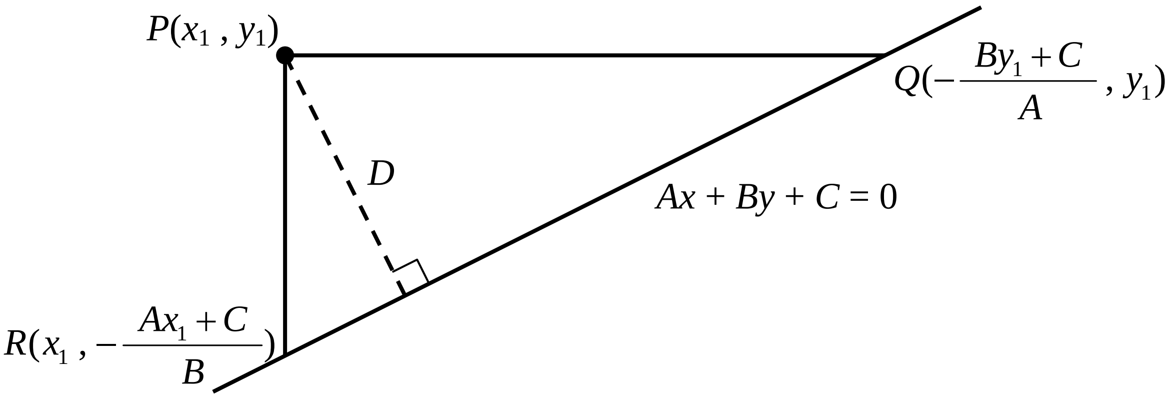
戚文鋒
中華基督教會譚李麗芬紀念中學

香港附加數學課程的解析幾何部分包括了直線的交角公式及點到直線的垂直距離公式。要證明上述公式，一般會分別用到三角學裡正切的複角公式及直線的法線式。戚（2004）曾提出更「簡單」的證明方法，但運算步驟略嫌繁複。本文介紹另一個較為「清脆俐落」的證明方法。

公式 1　由點 (x_1, y_1) 到直線$Ax + By + C = 0$ 的垂直距離D為

$$D = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| 。$$

證明　只考慮 A、B 皆非零的情況。



從$P(x_1, y_1)$ 作一水平線到$Ax + By + C = 0$，設交點為Q。又作一鉛垂線到$Ax + By + C = 0$，設交點為R。考慮 ΔPQR的面積，可得

$$\frac{1}{2} \cdot PR \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot D \cdot QR$$

$$\left| y_1 + \frac{Ax_1 + C}{B} \right| \left| x_1 + \frac{By_1 + C}{A} \right| = D \times \sqrt{\left(x_1 + \frac{By_1 + C}{A} \right)^2 + \left(y_1 + \frac{Ax_1 + C}{B} \right)^2}$$

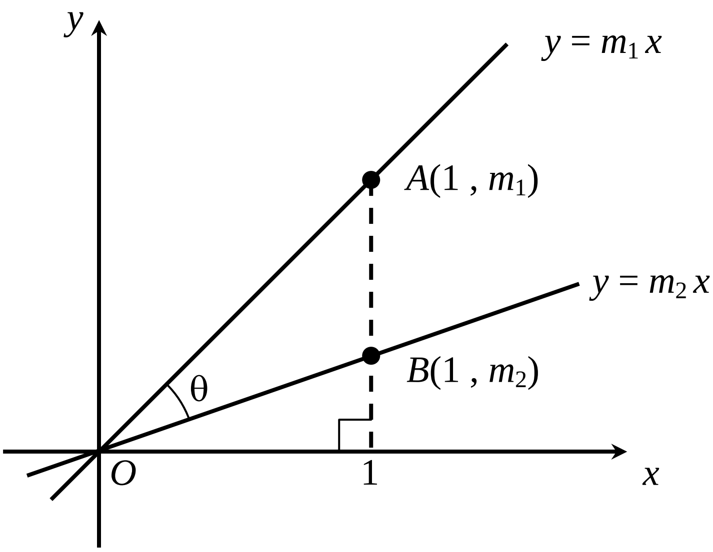
$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|^2}{|A||B|} = D|Ax_1 + By_1 + C| \sqrt{\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}}$$

$\therefore \qquad D = \left| \dfrac{Ax_1 + By_1 + C_1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$

公式 2　若兩直線的斜率分別爲m_1及m_2，且其交角中的銳角爲 θ，則

$$\tan\theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| 。$$

證明

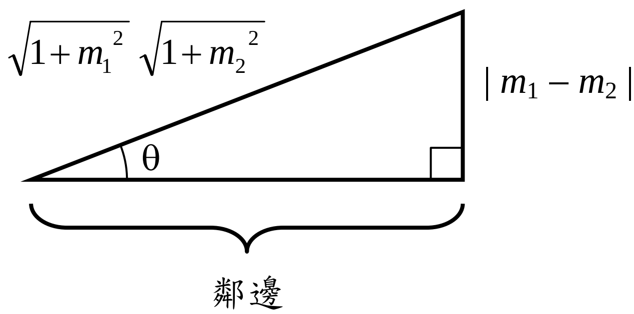


考慮 ΔOAB 的面積，可得

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin\theta = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot 1$$

$$\sin\theta = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{1+m_1^{\ 2}}\sqrt{1+m_2^{\ 2}}}$$

若 θ 爲銳角，由下圖可得



$$\text{鄰邊} = \sqrt{(1+m_1^{\ 2})(1+m_2^{\ 2})-(m_1-m_2)^2}$$

$$= \sqrt{1+m_1^{\ 2}m_2^{\ 2}+2m_1m_2}$$

$$= \sqrt{(1+m_1m_2)^2}$$

$$= |\ 1 + m_1m_2\ |$$

$$\therefore \qquad \tan\theta = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$$

θ 爲鈍角的情況在此不贅。

此證明假設了兩直線通過原點。但對於任何兩條相交於一點的直線，也可通過平移，使得其交點與原點重疊，而不影響兩線的斜率及其交角。故上述證明不失其普遍性。

參考資料

戚文鋒（2004）。「直線的交角公式及點到直線的垂直距離公式的『簡單』證明」。《數學教育》18 期，54 – 57 頁。

作者電郵：cmf@tllf.school.hk