

一份簡單的小學數學教育臨床案例及其分析

楊慶餘

上海師範大學小學教育研究所

引言：事件起因

在小學數學的規則學習中，究竟是掌握演算法重要還是發展思維重要？兒童對常規方法的形成，究竟是源自於從課程知識自身的結構分析而形成的？還是從社會知識活動的嘗試操作而形成的？這些都一直是困擾著小學、尤其是小學低年段的規則學習的問題。

時值國家教育科學「十五」規劃教育部的重點研究專案——《小學數學學習中 hands-on 的探索與實踐》進入臨床階段，於是，課題組運用了非結構型臨床觀察技術，配合 2 至 3 架攝錄影機，對多個課堂教學進行了全息資訊的採集。

基本資訊

本案例中被觀察的是被隨機選擇的二年級的一個有著 38 人的班級，執教的是一位具有 7 年教齡的、正由有初任教師向成熟教師發展的女教師，也是本課題組的一位核心成員。為了使被觀察者盡可能的不受影響，受觀察的整個年級都已經經歷過多次這樣的臨床觀察，對攝像機進教室已經比較習慣了。

觀察目的

透過這樣多次的非結構型臨床觀察，我們企圖去真正弄清，兒童、尤其是低年段的兒童，究竟是如何進行規則學習的？他們究竟是如何去理解和形成演算法的？支援他們學習的，究竟是對課程知識的分析，還是基於經驗的操作性活動？

臨床案例

課題：加減法速算

課時：一教時

臨床觀察：

場景觀察

- 所有的學生是按小組坐的，每組最多的是 6 人，最少的是 4 人；小組之間是按「秧田型」的方式排列。
- 每一組的課桌上有教材，練習簿和幾張空白的練習紙，一些各種面值的且是縮小的複印出來的「人民幣」紙券，等等。
- 每一小組的桌上還有一張畫著各種物品且標上價格的「單字」。

活動描述

- 課一開始，教師就給學生描述了這樣一個情境：耶誕節快到了，那麼，為安排聖誕慶祝晚會，玲玲與媽媽去商場大採購。她們看到一棵標價是 199 元的聖誕樹，同時出示一棵聖誕樹的剪紙模型。接著向全班同學提出任務：「如果你是媽媽，那麼該怎麼付費？請你用書桌上的學具紙幣，試著放一放。」
- 各小組的學生開始討論與操作。

觀察

- 在觀察者邊上的小組有四個同學。他們似乎並沒有什麼討論，也沒有什麼嘗試，就直接找了一張 100 元面值的「人民幣」。於是，僅十來秒鐘就完成了「任務」。
- 觀察錄像時發現，有一個小組有五個學生組成，他們是先嘗試尋找能正好組成 199 元的各種面值的紙幣，結果，也僅 5 至 6 秒的時間就放棄了這種嘗試。觀察者注意到，給各小組各種面值的「人民幣」紙券數量不多。

活動描述

- 約 1 分鐘後，教師停止了學生的「操作」活動，並請各小組的學生來彙報交流。

對 話

學：（一邊用投影儀投出兩張面額為 100 元的紙幣，並一邊解釋）我們用的是這兩張 1 百元紙幣，總共付出 200 元，找回 1 元。

師：為什麼會想到付 200 元呢？

學：因為 200 元與 199 元最接近。

師：你們都是這麼放的嗎？

學：（異口同聲）是！

觀 察

- 觀察者注意到，有一個小組的學生似乎「放」的比較複雜，通過 2 號機位的特寫，可以發現他們好像取的是 100 圓面值的一張，50 圓面值的一張，10 圓面值的四張。
- 學生的彙報前後共有四組。

活動描述

- 緊接著彙報活動，教師又出示了一個兩層的精美蛋糕的剪紙模型。然後佈置任務：「玲玲與媽媽又看到一個價格為 298 元的蛋糕，這次，玲玲吵著要自己付費，那麼又該怎麼付呢？請你幫玲玲想想。」
- 各小組學生按上次的方式，再組內做嘗試操作活動。

觀 察

- 最快的小組再於 2 至 3 秒鐘內就完成了「任務」，最慢的也只用了 10 秒以內的時間。
- 這次觀察者沒有發現學生中有不同的方法出現，幾乎清一色的用了三張 100 圓面值的「人民幣」紙券。

活動描述

- 與上次的活動一樣，教師也組織了各小組的彙報活動。這次一共請了兩個小組的學生代表來回答。
- 學生的彙報與上次的回答也基本一樣。

對 話

學：我拿出 3 個 100 元，總共 300 元，找回 2 元。

師：爲什麼想到拿 300 元呢？

學：因爲 298 最接近 300。

活動描述

- 接著第三個學生的彙報，教師又呈現了這樣的情境：「玲玲與媽媽呢，準備穿上漂亮的新衣服來迎接客人，於是，兩人又開始買衣服。媽媽看中一件價格爲 497 元的晚禮服，而玲玲看中一件價格爲 168 元的裙子。現在如果要一起買下，將要付多少錢？」。並提出學習任務：「請大家看看桌子上的這張紙，幫玲玲算一算，怎麼算，有幾種演算法？」
- 學生繼續以四人爲小組單位進行討論。同時再自己的練習紙上開始「演算」。

觀 察

- 觀察者發現，多數的小組幾乎是立刻就開始列出算式並進行演算。而且小組內的討論或爭論，也多集中在「還可以怎麼算」上面。
- 教師遊走於各小組中間，不時地俯下身去看學生的演算。同時，手上還拿著幾塊小黑板，並隨時給了幾個學生。
- 拿到教師給出小黑板的學生，立刻就在小黑板上面寫了起來，寫完後，就立即走上講台，將小黑板掛在大黑板上。
- 整個學生的活動進行了約 5 分鐘的時間。

活動描述

- 隨著最後一個學生將小黑板掛在講台全面後，教師也就停止了所有學生的活動，請大家注意這些學生的各種演算法。

觀 察

- 這時，講台前呈現了這樣一些演算法：

1. $168 + 497$ = 665	2. $168 + 497$ = $165 + (497 + 3)$ = $165 + 500$ = 665	3. $168 + 497$ = $200 + 497 - 32$ = $697 - 32$ = 665
4. $168 + 497$ = $168 + 500 - 3$ = $668 - 3$ = 665	5. $168 + 497$ = $200 + 500 - 3 - 32$ = $700 - 3 - 32$ = 665	6. $168 + 497$ = $168 + 500 + 3$ = 671

- 教師要求各小組的學生看著這些演算法，在這張練習紙上做一個填空選擇（練習紙上印的是：(1) 第〈 〉個算式是正確的；(2) 第〈 〉個算式是錯誤的；(3) 第〈 〉個算式是最簡便的？）

對 話

學：我認為第 3、5 個算式都是正確的；

學：不對，第 1、2、4 個算式也是正確的，而第 6 個算式是錯誤的。

師：錯在什麼地方？為什麼會錯？

學：式中的「+3」應改為「-3」，因為「497」寫成了「500」，是多加了 3，所以應減去「3」。

師：那麼第幾個算式是最簡便的呢？

學：第 2 和 4 算式。

師：那麼，在第 5 算式中，為什麼要「-3-32」？

學：分別把 168 寫成 200，把 497 寫成 500，所以應減去多加的部分，就變成「-3-32」了。

師：這方法怎麼樣？

學：太麻煩了。

師：那我們就把它去掉（同時取下相應的小黑板）。再看第 3 個算式中，為什麼要「-32」？

學：把 168 寫成了 200，故要「-32」。（教師取下相應的小黑板）

師：再看第 1 個算式中，很明顯，這是口算出來的（拿去相應的小黑板）。這樣就留下第 2 和 4 兩個算式了，看看它們的區別在哪？

學：在第 2 算式中，把「168」寫成「165」與「3」相加，而這裏的「3」與「497」合併正好是整數「500」，這樣，500 與 165 就很容易算了。

師：497 這個數是接近於整百的數，把 497 看作是 500 來算較簡便一些。如果是你，會選哪個方法？

學：第 4 個算式的演算法。

師：大家說的都很有理由，第 2 和 4 都是較簡便的，而且我們都是把一個接近整百的數用整百的數來計算。今天我們就來學一學「加減法的速算」（教師板書課題）。

觀 察

- 到教師板書課題止，整個教學活動共化時接近 22 分鐘。其中，從六個「演算法」出來到討論結束，共花費教學時間約 14 分鐘。
- 觀察者注意到，自教師第三次呈現「任務」起，學生就沒有再回到原來情境之中，而且也再沒有使用這些代用的「人民幣」紙券。

訪談：備課者的思路

參加者：觀察者（暫且稱爲 G）、執教的教師（一位年輕的女教師，暫且稱爲 A）、兩位參與教學設計的教師（一位是該校主管數學教學工作的女教導主任，暫且稱爲 B；一位是年紀稍長的女教師，暫且稱爲 C）

說明：訪談由觀察者在教學活動結束後突然提出的，事先並沒有整個計劃，因此，這三位教師都沒有準備。

主題：訪談的主題是由觀察者在聽課的觀察中想到的，並隨手記在了聽課本上，沒有一定的邏輯性。

訪談摘錄

G：謝謝三位老師，尤其要謝謝 A 老師，給我們展示了一堂非常精彩的數學課。

A：不客氣。

- G：在聽課的觀察中，我形成了幾個問題，想和三位一起探討一下，行嗎？
- B：可以。
- G：你們設計的這堂課的主要教學目標是什麼？
- B：就是讓學生通過已有的日常生活經驗，來掌握「加減法速算」的方法。
- G：在教學設計的時候，你們考慮到的學生在學習中的可能的難點是什麼？
- B：主要就是學生常常會將最後的結果是進行加還是減要搞反掉。就像剛才的練習中，結果應該是再減去 3，還是有不少的人誤算成再加上 3 了。
- G：（面向 A 老師），您認為這樣的速算有一定的規律或方法嗎？
- A：我想應該是有的。
- G：那麼這些規律或方法是不是需要交給學生呢？
- A：我讓學生去找最簡便的方法，就是想將這些規律和方法交給他們。
- C：（插話）如果最後不將這些東西交給學生，那麼，學生在這節課裏就等於是白學了。
- G：還有一個問題，（面向 A）您為什麼要在教學活動開始的時候，設計這麼一個情境呢？
- A：什麼情境？
- G：哦，就是您設計的那個耶誕節購物的情境，目的是什麼呢？對一個二年紀的孩子來說，有什麼特殊的價值呢？
- A：事先是想讓學生感受到，這種速算方法再我們的日常生活中是經常要用到的。另外，還是想利用學生已有的用錢購物的經驗。
- B：因為這裏的速算，最關鍵的是要能找到一個數最接近的整十、整百的數。因此，通過整個購物的活動，可以先訓練學生怎麼去尋找一個數最接近什麼整十、整百的數。
- G：（打斷）那預先給學生這些複印的「人民幣」有什麼用呢？
- B：我們就是想類比現實的真實情境，讓學生去自己動手操作一下，發現一些規律。

G：（面向 A）通過教學實踐，您發現整個效果起到了嗎？

A：應該是有一些效果的。但是好像並不够明顯。可能是學生還不習慣吧。

... ..

G：再一次謝謝三位老師。

問題的形成與分析

一些值得思考的問題

第一，所謂的「加減法速算」的問題究竟是怎麼形成的？它是源自於知識內部結構的分析？還是來自於日常生活的需要？

第二，在本次學習活動之前，兒童可能已經構建了哪些相關的經驗？他們這些已有的經驗究竟在今天的學習中起什麼樣的作用？也就是說，教師創設的生活經驗情境，是否真的能有效地支援學生的「數學化」過程？

第三，對於「加減法速算」這樣的內容，在學習中，究竟有沒有一個統一的「演算法」？是不是一定要統一一些所謂的「最簡便」的演算法？換句話說，支撐這種活動的，是程式性的知識成分更多些，還是策略性的經驗成分更多些？

第四，值得更進一步思考的是，這樣的學習，是讓學生掌握某些演算法的目的成分更多些，還是讓學生能再實踐性的活動中逐漸悟出並形成某些策略的目的成分更多些？或者說，將多樣化的方法是放在一個演算法的平台上來考慮更好些呢？還是將多樣化的方法放在一個思考的平台上來考慮更好些呢？

第五，可能還有一個問題也會引起我們思考的，那就是學生自己動手操作的價值究竟在什麼地方？

一些初步的分析

第一，計算作為一種工具性技能，是人們面對日常生活和生產所須與不可離的，同時也是進一步學習數學或其他學科知識所必須的；其次，計

算最爲一種探究性能力，是人們面對複雜的生活問題和社會問題進行探索與解決所需的，人的許多行爲的抉擇，行動方案的提出，往往是要在對眾多的資料資訊進行某些分析後才能作出。同時，它還有利於發展學生的基本智慧。因爲運算是一種心智技能和動作技能協作、外部操作和內部思維同步、形象感知和抽象思維統和的一種心理活動過程，是一個知識提取、技能運用和問題解決的協同過程。此外，不同的計算形式對學生的智慧發展的側重也有所不同。例如，口算就非常有助於發展學生思維的敏捷性，而筆算就非常有助於發展學生思維與運動的協調性，估算則非常有助於發展學生思維的反省性，可速算則一方面能發展學生良好的數感，另外還能培養學生運算思維的敏捷性，並提高學生估算的能力。如學生看到諸如 103、98 這樣的數，馬上會判斷出它們在數序中的基本位置，因此就會立刻聯想到 100 這個數，又如，學生看到 25×44 這樣的算題，立刻就會聯想到 20 與 100 的關係，自覺地將 25 轉化爲 $100 \div 4$ ，於是，運算被改變了成爲了 $100 \div 4 \times 44$ ，即變爲 $100 \times 44 \div 4$ 。

第二，兒童對運算意義的理解，不是從以符號爲表徵的概念開始的，而是以自己的生活情境爲基礎的實踐活動開始的。例如，兒童知道了 2 加 3 等於 5，並不代表他就理解了加法的意義，同樣，兒童看到 $2 + 3$ 能讀出「2 加上 3」也並不代表他理解了加法的意義。兒童是在豐富的生活情境之下，通過自己的實踐活動來逐漸獲得對加法意義的理解的。同時，利用豐富的生活情境，不僅可以幫助學生理解運算的意義，又是也可以進一步擴展學生對運算意義的理解。

第三，「數感代表著個人使數、數位系統和運算具有意義的觀念」，更準確地說，數感實際上代表著不同個體因自己的經驗、學習和能力而逐漸發展起來的關於「數」的良好的智力結構。從美國的 NCTM 看來，良好的數感至少表現在這麼幾個方面：(1) 能充分瞭解數的意義；(2) 能瞭解數與數之間的多種關係；(3) 可以較快地辨識出數的相對大小；(4) 知道數的運算的實際效果；(5) 能將數學知識與他們周圍環境中常見的物體和情境相聯繫。可見，良好的數感是形成數量概念和數理推理的基礎，是理解和掌握

運算規則的條件，是形成運算技能的重要保障。更主要的是，良好數感的一個重要方面就是具有一定的數的位置感和數之間的關係的敏銳反應，這種良好的感覺與敏銳的反應能促進兒童對數的意義的進一步理解和對數的準確的運用。

第四，不同情境下的各種資料有著各自不同的處理策略和模式，同樣，每一個人對相同的資料也會有自己獨特的處理方式和策略，因此，實際上每個人的數感的發展和對大戶的理解的發展方式、途徑和過程也是有區別的。同樣的，因為不同現象之間或不同的結果之間所蘊含的數的關係模式是不同的，通過對這些不同的數的關係模式的模式，可以幫助學生進一步加深對數的理解。例如：「到你家附近的銀行看看利率，考慮作一個投資要得到加倍回報所需的時間範圍」；或者「將兩個骰子同時扔出去，看看正面朝上的兩個數位的積是奇數（單數）還是偶數（雙數），這樣多次的扔，你認為可能會達到什麼樣的結果？」對於確定現象和不確定現象的描述是不同的，因而這裏的數所表示的意義也是不同的。

第五，一般認為，一個具有良好估算能力的人，通常表現在這麼幾個方面：(1) 面對一個實際問題，知道該用哪些運算；(2) 對每一種運算及其性質，心中都有一個實際的模型；(3) 對四則運算之間的關係有所瞭解；(4) 對每一種在參加運算的兩個數上所產生的效果有所瞭解。培養學生學會猜測，發展學生的估算能力，其目的不僅僅是爲了使學生能經常去主動檢驗自己的運算結果，而更主要的是爲了發展學生的更爲一般的數學能力。因爲：

- 估算能力的提高，可以發展個體的資訊獲取和處理與利用的能力；
- 在日常工作或生活中，估算能幫助我們較快地作出某種策略或行爲的抉擇。在許多情況下，個體可能會面對眾多繁雜的資訊，而個體的策略或行爲的抉擇可能並不需要個體去通過對這些資訊的精確計算後才能作出，估算就有可能加快個體採取行爲的決策。現代的學習理論認爲，面對一個運算問題，人們需要學會 (a) 迅速判斷它是否需要計算？

(b) 同時要能判斷出它是否需要作出精確的計算？(c) 才考慮採用什麼方法進行計算？

- 估算是一種主動學習的基礎。面對一個學習問題，個體如果能先作出一個基本的預測和大致的估計，就有可能會激發個體去進一步探究問題解決的方法、途徑和策略，使學習變得更為主動；
- 估算還能幫助學生加深對運算意義的理解和常規方法的形成；
- 估算還有助於學生的數學問題解決策略的形成。例如，當學生需要對課題或自己已經完成的計算進行估算時，可能首先需要對課題做某些簡約化的形變，像 87889 這樣的資料就會看作是 87000，而像 59783 這樣的數就可能被看作是 59000 或 60000；有時，學生可能還會作出某些運算性質的轉換，以便自己作出有效的估算。像 $498 + 502 + 511$ 這樣的運算，在估算時，可能將其轉換為 500×3 就是一個非常有效的策略；而有時，利用某些補償性策略，估算還能幫助學生進行準確的計算，像 $102 + 98 + 105 + 96 + 103$ 這樣的算題，學生先估算其大致的結果，利用的是課題的轉換，變為 100×5 ，而後，為了估測其結果的一個大致的範圍，學生就會思考，因為 5 個數中有 3 個數超過 100，這就要看超過 100 部分的總和與不足 100 部分的總和之間的大小，於是，再進行 20 以內的口算，即 $2 + 5 + 3 = 10$ ，而 $2 + 4 = 6$ ， $10 > 6$ ，則結果肯定超過 500。這時，實際上學生已經可以將精確的結果求出來了，就是 $500 + 10 - 6 = 504$ 。而這個過程的本質就是一個複雜的思維過程，用到了思維的可逆性、思維序列的轉換以及思維的邏輯推測等等。這樣來看，估算實際上也就轉變為某種速算了。

第六，Reth 就認為，「只有當經驗想學習過程轉變時，我們才能依靠經驗來學習」，但是，「也可以有一種阻止進一步經驗的造成強烈印象的作用」，因此，「生活經驗可能對我們有阻礙作用，也有促進作用」（參見 Heinrich Roth 《教和學的教育心理學》，德國漢斯·賽得爾基金會和上海師資培訓中心聯合編印，12 頁）。

對案例的剖析

第一，從教學過程看，教師設計的生活情境似乎並不能真正支援學生

的數學學習。

對一個一般的人來說，生活中一個標價為 198 元或 298 元的物品，在付款時並不一定就是拿出整數 200 元或 300 元，這要依據實際的情境而定；況且，對一個二年級的兒童來說，判斷 198 或 298 最接近的整百數是 200 或 300，這又顯得過於簡單，難以激發學生的學習動機，引起學生的學習興趣。

第二，實際上，假如教師設計這麼一個情境：要購買兩件標價分別為 198 和 296 元的物品，大概要多少元錢？注意觀察他們的思考就可以發現，事實上絕大部分的學生都會經歷這樣一個過程：先假定這些標價分別是 200 和 300 元，於是，將這兩個數合併，就是要估出的價格，這實際上就是兒童的經驗。當需要給出準確的錢數時，他們就會在已經估出的 500 元裏面減去多給的 $(2 + 4)$ 元。整個過程不是我們按部就班的、小「碎步」的去教學生，而是需要學生通過自己的實踐性的活動去「悟」，去歸納的。

同樣的，當教師再給出這樣的情境：要購買兩件標價分別為 198 和 203 元的物品，大概要多少元錢？我們觀察一下就可以發現，在估算時，它和前面的問題是「同構」的，結果是一樣的。也是 500 元。當需要給出準確的錢數時，所採用的策略也是相同的，就是再「尾數」做一些「增減」。

回憶一下，當我們拿了一張定額的「代價券」（如是 500 元）到超市去購物（這種代價券往往需要一次將定額用完）是，你首先用的策略是什麼？可能就是「估算」，除非你的口算相當的好，或者你帶了一個計算器。於是，我們不僅可以發現，估算往往是這種「速算」的前提，而且也正是我們再日常生活中常用的一種技能。

第三，既然策略相同，那麼，究竟是什麼不同呢？顯然，不同的只是對尾數的「增」或「減」做出準確的判斷。這就需要有良好的數感來支援。可能這也正是這節課真正的價值所在：通過這樣的學習，來發展學生良好的數感。只有這樣，學生才能真正擺脫哪些所謂的圖式（實際上是人為製造的記憶符號）——「多了就減去，少了就加上」。

第四，還是來回憶一下經驗，當我們遇到兩件分別標價為 198 元和 298 元的物品時，我們會採用什麼樣的行動呢？實際上，情境和習慣才是真正

抉擇我們行爲的兩大要素：當你手上沒有足夠多的零錢時，你可能會毫不猶豫地遞上 5 張 100 元面值的紙幣的。開始，當你手上可能會有足夠的零錢是，可能你的性格和習慣就成爲了你採取行爲的要素了。因此，在這裏，試圖想依據經驗來形成某種規定的演算法是不可取的。

第五，再來看看第一個問題情境所形成的六個演算法。除了演算法 6 在計算上有錯誤之外（很有可能就是因爲沒有建立比較良好的數感所致），其他的五個演算法，究竟有些什麼特點呢？教師認爲，演算法 1 明顯是口算出來的，一定嗎？可惜的是，無論教師還是觀察者，都沒有在課後去通過訪談做一個瞭解。

但是，按我們的經驗，實際上有不少的學生在解決問題的過程中是省略中間步驟的。需要討論的是演算法 2 到演算法 5。演算法 5 顯然是由於剛才的兩個例子的遷移所造成的，教師認爲是「太麻煩了」，因此就將它「去掉」了。問題是，這個演算法在策略上與演算法 2、3、4 是相同的，不同的只是技巧而已。可技巧卻又不是一句「太麻煩」就可以形成的，需要在不同的情境中不斷地嘗試、反思和操作來形成的。再看演算法 3，教師可能認爲也是屬於「太麻煩」一類的，於是沒有和學生「商量」就「將小黑板拿下」了。問題是，如果這兩個資料分別是 165 和 494，可能會是什麼樣呢？至少用這個方法就不會遇到退位減法！更需要討論的是演算法 2 和演算法 4，雖然他們在形式上是差不多的，可是，只要我們仔細觀察就可以發現，這兩種方法顯然屬於兩個不同的思考水平層次。如果說演算法 4 還可以看作是對直觀經驗的依賴的話，那麼，演算法 2 則已經完全擺脫了對直觀經驗的依賴，依靠的是良好的數感和對運算意義的理解。