

何謂幾何

純粹的真論是科學的極星，然而數學
比其它學科更易喚醒孩子們對於真理
的熱愛。
—— Simon Max

李學數

在美國四年級課室講幾何

李學數

「純粹的真理是科學的北極星，然而數學比其它學科來，
更容易喚醒孩子們對於真理的熱愛。」

--Simon Max.

我的兒子念祖的老師邀請我到她的課室對小朋友講數學，這些
小孩子是在四年級，我記得當他們還是二年級及三年級時我會給他
們講一些數學故事和玩數學遊戲。

每一年級的老師會變換，孩子升到四年級時課程就有一些科學
的內容，如簡易的物理、生物、化學，這部分是由另外一位專門教
科學的老師負責。

念祖的級任老師負責教文化、歷史、地理和數學，有一天我看
他拿回家的數學作業竟然是要學生寫阿拉伯數字 1, 2, 3, 4, ..., 88
時，我就好奇的問：

「這不是幼兒園孩子做的東西嗎？」

「我的老師在課堂上要我們寫這些東西，算術真是無聊！」

我想這位老師可能是屬於那些「看到數學就怕的一代」，我應
該去找機會和她談談。

=====

本文得廣角鏡出版公司慨允轉載，謹此致謝。

在美國學校有許多教數學的老師並沒有受過嚴格的數學教學訓練(法國在這方面比美國好十倍，因此法國的數學教師教學上比美國強許多)，有許多人不知道怎麼教。美國國家科學基金會給了許多錢去做數學教育改進的研究，結果生效不大。美國的數學基礎教育成績一般來說比日本、大陸、台灣、新加坡還低。

不止「小約翰不會計算」，甚至「大約翰也不會計算」，我教的二十五歲的大學生竟然在考卷上寫 $6 \times 12 = 84$!

我有一個同事，他的前任太太是在初中教數學。她曾對我說她不懂數學，也害怕數學，可是學校安排她去教數學(因當年數學老師缺乏，許多人轉行去做電腦程式員，不去教書)，她只好「濫竽充數」，要她的丈夫把第二天要教的數學內容預寫在透明塑料片上，第二天上課時就放在投影機上照本宣科，她說她就是這樣「混了許多年」。

她坦白告訴我，她到現在還是不知道數學是甚麼？她也不知道怎樣才能教好數學。

數學教育如果是由不能勝任的教師來教，當然結果就是「一代不如一代」了！

我的一位同事告訴我，有一天他的兒子告訴他老師要全班的學生寫 one, two, three, ..., twenty-four, twenty-five, ..., one hundred 作為六年級學生的數學作業，因為這樣他們以後寫支票就不會寫錯。他就決定把自己的研究擱一邊，常常到孩子的課室親自協助老師教數學，他不希望這個無知的老師把他的孩子及同學教得以為數學就是搞這麼無聊的事。

我的一位從事數學教育的大學同事趙青女士，她獲得哥倫比亞大學的物理博士學位 -- 是吳劍雄教授的高足之一，為了想獻身數學教育的工作，向她的 Lockheed 公司申請休假兩年來我們的大學教未來的小學和中學老師數學教育。

結果令她驚異的是大部份學生們思想僵化，沒有求知學新的意念，學生的表現非常的差勁，使她受到挫折。她覺得這些未來的老師沒有學習的興趣，只想不經勞苦而獲及格分數，使她感到非常失望。她對我說她有時氣憤及沮喪，回家就去刷廁所和廚房的地板，以及去製果子醬分贈給朋友，不要想這些教書令人生氣的事。

最近她要求在 IBM 以前合作的朋友讓她去那裡做實驗，她要忘記這些令她傷心失望的事，她說她不要教書了，去做實驗對著儀器她還比面對這些「未來的教師」更快樂。

我是可以體會她的「無力感」，以及她對學生的失望，我對她說：「如果我們能做個榜樣，在這麼差的條件下還能創造出成績來，他們以後也可能像我們一樣認真的教學，不會害死下一代！」

有一天兒子的 Athonour 學校要家長去和老師們討論孩子的學業成績，我決定利用這機會和孩子的老師談我想在她的課室講一點數學。

P女士是很誠懇坦白，她說我兒子的數學非常好，在課室裡常幫助她教其他小朋友，她現在教的數學有一些她不懂，反而小孩子有時比她還明白。

我對她開玩笑說：「我是數學傳教士，希望更多人能明白這宇宙的真理。你願意不願意讓我來您的課室對小孩子講一點數學，我不講超過他們了解的東西，而且儘量配合你的教材內容來講。」由於我的教書工作繁重，我只能給一小時的時間，她很高興地允許。

我在 1995年12月1日就去她的課室。我帶了幻燈投影機及一些白紙和透明塑料紙。根據她的進度我是要介紹幾何及三角形的性質。

我計劃是在前半個小時我會放映80張關於幾何知識的幻燈片，後半個小時我要講解：「為甚麼任意三角形三個內角和是 180° ？」以及從這裡的推廣。

全班 24 位小朋友都很高興地看投影在銀幕上的五顏六色的幻燈圖片。

首先我給他們看大自然出現的有規則的幾何圖形：礦石的切片出現正三角形、蜜蜂窩的正六邊形、海星的五個爪、雪花對稱的美麗圖形、結晶體的正多邊形、顯微鏡中的對稱藻類、中國的窗花、波斯人地氈的圖案、耶路薩冷回教寺院大門的美麗圖案、荷蘭畫家 Escher 的幾何圖案。

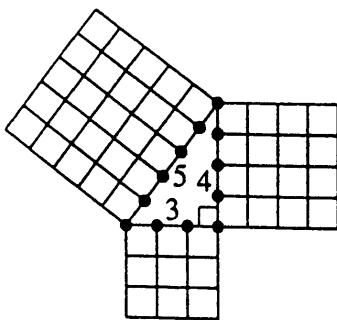
然後我給他們看一張希臘郵票，上面印有三個棋盤湊成的一個直角三角形，我解釋甚麼是直角。

我說在四、五千多年前在現在的中東地區曾有一個非常進步文化的國家，這個國家名叫巴比倫。那裡的人很早就建雄偉的城市，而且由於農業的需要，他們要觀察天體的運動，發現天體像日、月、火星、金星的運動有一些周期的現象。

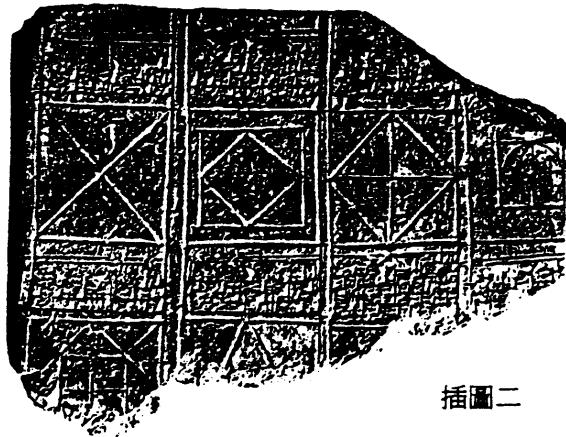
我問小朋友，知道甚麼是度數(degree)？小孩子雀躍地回答：「圓是 360° ，直線是 180° 。」小孩子沒法正確解釋。我就拿一枝尺在投影機上放，我說：

「假定我手拿的這一端尺是地球，另外一端是太陽，古代的巴比倫人認為太陽是繞地球轉。」尺徐徐轉動，劃了一個大圈，巴比倫人定義從這個尺所劃出的角是 360° 。

我們現在就是用四千多年以前古巴比倫人的東西，然後我放一張巴比倫人有圓及正方形的圖形的泥板書的圖片，解釋他們怎麼樣構造直角。(插圖一、二)



插圖一



插圖二

接下來我放映了歐幾里德、阿基米德和畢達哥拉斯的像，告訴他們阿基米德用太陽能燒毀敵人船隻的故事，以及他在研究幾何時被入侵的羅馬兵士殺掉的幻燈片，然後秦始皇的相及他的萬里長城，我說中國在二千多年以前已懂得用直角三角形的知識來建萬里長城。

我給他們看愛因斯坦的相，小孩子都認識他，我說他小時教師教他幾何，他發現幾何是很有趣的數學。以後他長大用數學做工具，來探索揭曉宇宙的秘密。

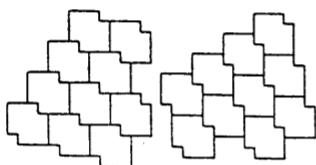
然後我轉入另外的一個領域：鑲嵌圖。

我先解釋甚麼是正三角形、正方形、正五邊形、……、正多邊形的意義。

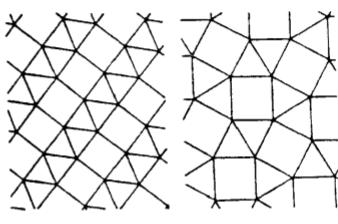
然後解釋怎麼樣用這些正多邊形來鋪滿一個平面。我給孩子們看一些地面上的鋪磚，一些廳堂的裝飾地磚，一些牆壁的美麗鑲嵌圖案。(插圖三、四)

孩子們非常高興看這些簡單的正多邊形可以拼湊出漂亮複雜的圖案。(插圖五、六)

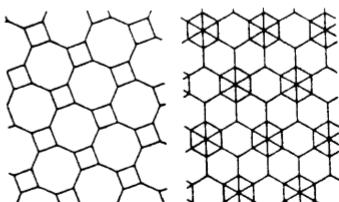
「是否不是正方形，像長方形、平行四邊形、梯形也能拼湊出一些漂亮的圖形呢？」我利用這個機會告訴他們平行線的概念，然後展出一些這樣拼湊的圖案。

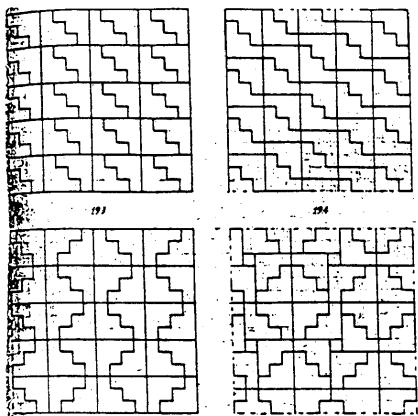


插圖三

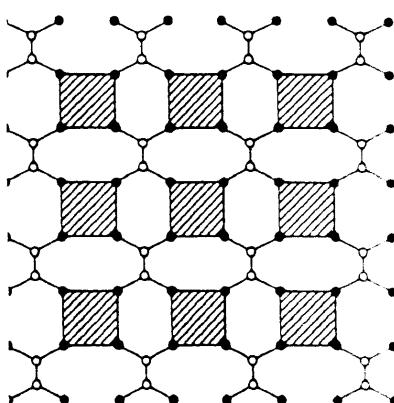


插圖四

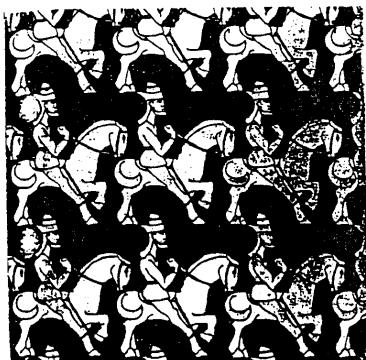




插圖五



插圖六



插圖七



插圖八



插圖九

我對孩子說，同樣的材料只要稍微不同佈置，就會形成不同的圖案出來，希望他們以後考慮問題要從各種不同的角度來考慮。

接著，我展示荷蘭畫家 Escher 怎麼樣在這些鑲嵌圖上加工，繪製出許多精美的圖畫出來。（插圖七、八、九）

最後的五分鐘，我放映了一些分形幾何（Fractal）的圖形。

我給孩子看用電腦繪製的朱莉亞集（Julia set（插圖十）），從硫酸銅電解生長出的像樹狀的分形（插圖十一），一些蕨類植物的葉子。

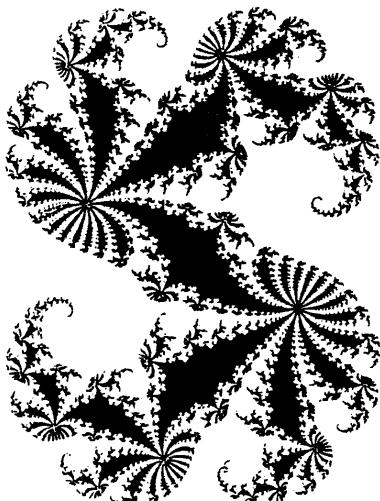
有一個分形的圖是像京劇孫悟空的面譜，孩子們好高興：

「這是一張猴子的臉。」

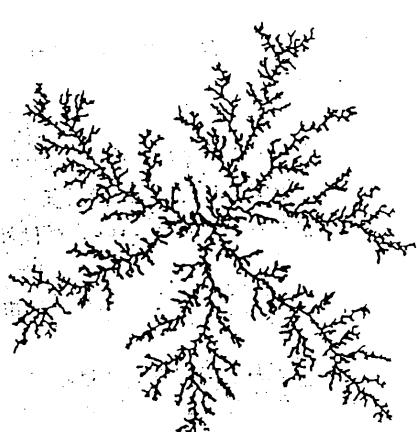
「不對！這是鹿。」

「No! No! No! 這是 ET 的相。」

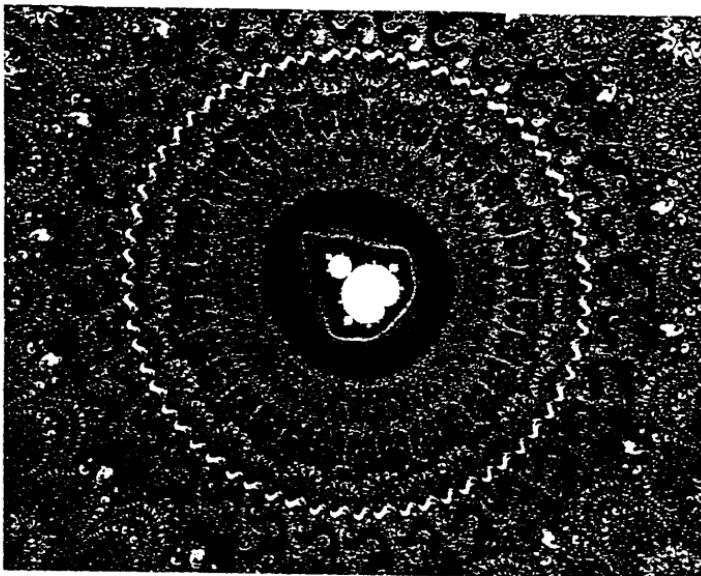
提出分形理論的開山祖師是在 IBM 公司工作的法國數學家 Mandelbrot。他三年前來加州伯克萊的羅倫斯博物館對小學生解釋分形時說：「分形理論可以跟小孩子講，他們會喜歡的。」



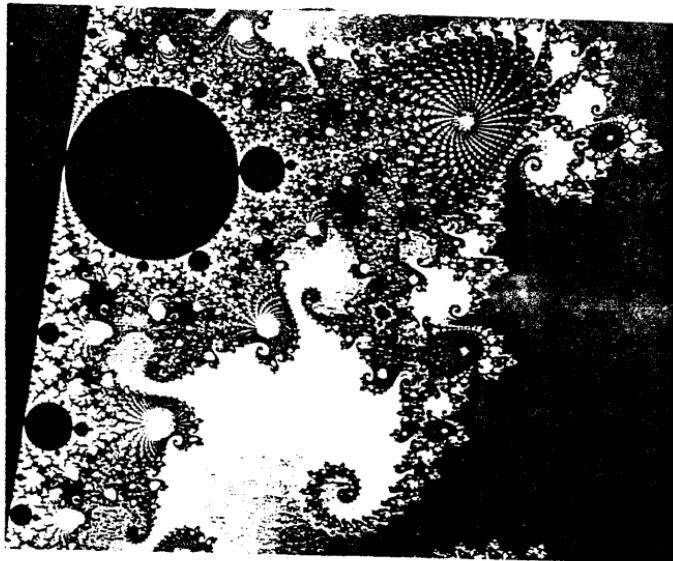
插圖十



插圖十一



插圖十二



插圖十三

果然這一班的小學生都對我提供的插圖十二、十三的分形感到興趣。(原圖是七彩，製版只是黑白，遜色許多。)

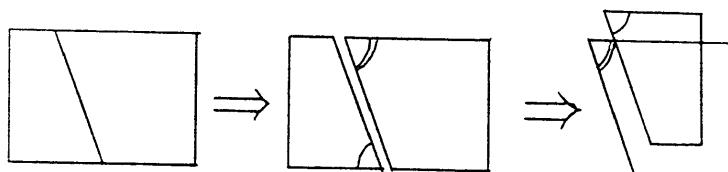
半個鐘頭飛快地過去。接下來我給每個小朋友一張長方形的白紙，我叫他們在上面隨便畫一個三角形，甚麼形狀都可以，然後用剪刀把這三角形剪下來。

我說：「如果我告訴你們，你們的每一個三角形的三個內角加起來是 180° ，你們會不會相信？」

我接下來在透明塑料片上畫一個三角形 ABC。我在底下寫
 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ 。

然後我用紅顏色塗 $\angle A$ ，用藍色塗 $\angle B$ ，用青色塗 $\angle C$ ，我要小朋友也同樣在他們的三角形上對應於我的三角形 ABC 塗類似的顏色。

「來！現在你們每一個人在剛才的白紙上用尺畫一條斜線。我要你們看這條線和兩個平行線所夾的角是不是相等？」



插圖十四

「你們怎麼知道它們相等？」

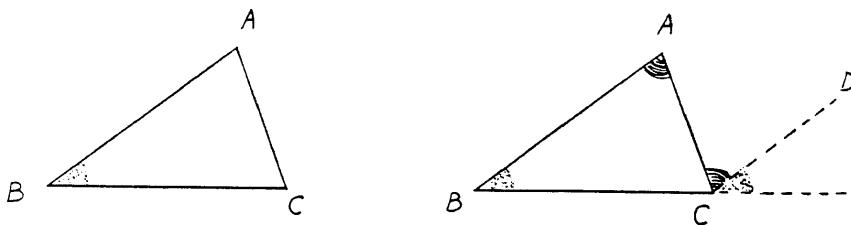
小孩子建議用量角器來量，我說：「萬一你量的不準確，兩個角度會不一樣，你就不能說是相等了」。

「你們可以用剪刀引著那條線剪，看看能把這兩個角合在一起嗎？如果可以的話，那麼你就相信這兩個角是相等。」

他們都說是。(插圖十四)

我就教小孩們怎樣用兩把尺畫平行線。

等他們都會畫平行線後，我就在原先的塑料片上的 $\triangle ABC$ 上表演過 C 作一條平行 AB 的線 CD。我把 $\triangle ABC$ 用剪刀剪下，把 $\angle B$ 和 $\angle A$ 貼在 C 的頂點的角上。(如插圖十五)



插圖十五

「你們看 $\angle A + \angle B + \angle C$ 現在變成了一條直線。」

一個小朋友說：「直線的角是 180° 。」

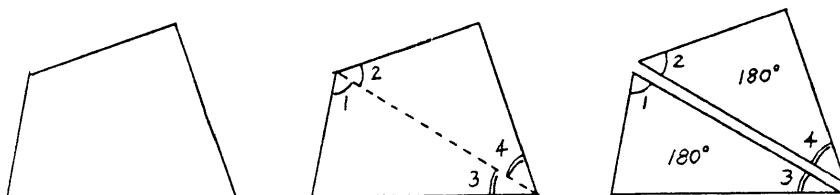
「你們現在相信三角形的三個內角和是 180° 吧。」

很多小朋友齊聲說：「相信。」

「好，那麼我現在請你們考慮隨便給一個四邊形，它的內角和是多少？」

一個名叫阿歷山大莉婭的小女生說：「長方形每個角是 90° ， $4 \times 90^\circ = 360^\circ$ 。」

我說：「如果不是長方形或正方形時怎麼辦呢？」



插圖十六

我用剪刀剪了一個任意四邊形，在它的對角線畫一直線，然後用剪刀引這線剪出了兩個三角形(插圖十六)，我對孩子解釋要算四邊形的內角和轉變成要算兩個三角形的內角和。許多小朋友領悟，馬上說：「 $2 \times 180^\circ = 360^\circ$ ！」

這時P女士說：「還有五分鐘就是休息時間，小朋友就要出去玩了。」

我說：「好！我只要五分鐘就講完了，小朋友，你們現在能不能告訴我五邊形的內角和是多少？」

有一兩個學生很快的算出來：「是 $3 \times 180^\circ = 540^\circ$ 。」

大部分的學生不明白這數字怎麼得來。我剪了一個五邊形，然後以一頂點為中心剪出三個三角形出來，學生馬上明白了，我要他們試算算六邊形的內角和。

「好，今天我就告訴你幾何的一個基本定理，以及它的推廣，你們可以相信幾何是一個很好玩的數學，我相信以後你們會喜歡它。」

這時下課鈴響，學生們像兔子一樣蹦蹦跳跳地跑出課室外，P女士幫我收拾幻燈機，她謝謝我來跟小朋友講數學，我把一份怎樣教製類似 Escher 圖案的教材資料給她，並且感謝她給我一個機會對她的學生講數。

在離開之前，我說：「在差不多一百年前有一個名叫米勒佛羅倫斯(Milner Florence) 在《學校評論》(School Review) 講這樣的話：『幾何似乎是屬於現實的，而詩歌則應納入幻想的框架。但在理性的王國裡，兩者又是非常一致的。對於每個年輕人來說，幾何和詩歌都是寶貴的遺產。』」

她問我：「明年你能不能來我的課室再對小孩子講數學？」

我說：「只要我有時間，我願意。」

是的，能對小孩子講數學，讓他們不害怕它，是令我高興的事，為甚麼要拒絕她呢？

完稿於 12.1.1995