四類平均數關係的應用模型

徐根海
浙江麗水師範專科學校數學系

在新教材數學第二冊（上）習題 6.2 中，有這樣一個習題：已知a、b都是正數，求證：$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，當且僅當$a = b$時等號成立。其實它們分別是調和平均數$H_n = \frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$、幾何平均數$G_n = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$、算術平均數$A_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$、平方平均數 $\Phi_n = \sqrt{\frac{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\ldots+a_n^{\ 2}}{n}}$ $(a_i > 0\ ;\ i = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ n)$ $n = 2$ 的情形，此題四個不等式描述了四類平均數$n = 2$ 時之間的大小關係。文 [1] 用數形結合的方法給出了它們的幾何模型不但直觀而且給人以美的享受。本文再給出它們的應用模型。

通過建立應用模型，學生不但加深了四類平均數間關係的理解，而且培養了數學的應用意識和學習數學的興趣。

1. $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ 的應用模型

(1) 某商店在節前進行商品降價酬賓銷售活動，擬分兩次降價，有三種方案：甲方案是第一次打 p 折銷售，第二次打 q 折銷售。乙方案是第一次打 q 折銷售，第二次打 p 折銷售。丙方案是二次都打 $\frac{p+q}{2}$ 折銷售。請問哪種方案降價較多？

解：設商品的原價為 a，甲方案打折後的商品價格為 apq，乙方案打折後的商品價格為 aqp，丙方案打折後的商品價格為 $a(\frac{p+q}{2})^2$。甲乙方案降價後商品價格顯然是一樣的。

$\because \ (\frac{p+q}{2})^2 > pq \quad (p \neq q)$，$\therefore \ a(\frac{p+q}{2})^2 > apq$，因此甲乙方案降價較多。

(2) 用一個有毛病（天平的兩臂之長略有差異，其他因素忽略）的天平怎樣稱量物體的重量？有人說祇要左右各稱量一次，再相除以 2 就可以了，你認爲對嗎？

解：設天平左臂長爲L_1，右臂長爲L_2，物體的重量爲G，當物體放在天平的左端並天平保持平衡時右端法碼爲G_1，於是得$GL_1 = G_1L_2$ ……①
同理把物體放在天平右端時左端法碼重G_2，於是得$GL_2 = G_2L_1$ ……②
① × ② 得$G^2 = G_1G_2$，即$G = \sqrt{G_1G_2}$。如果左右各稱量一次，再相除以 2 就可以得$G = \frac{G_1+G_2}{2}$，$\because \ \frac{G_1+G_2}{2} > \sqrt{G_1G_2} \quad (G_1 \neq G_2)$，$\therefore$ 有人說祇要左右各稱一次，再相除以 2 就可以了，這是不對的。

2. $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2}$ 的應用模型

(3) 汽油價格波動很大，甲、乙兩位駕駛員分別用下列兩種不同的方式購買汽油。其中甲每次都買相同金額的汽油（比如每次都購買 a 元），乙每次都購買相同數量的汽油（比如每次都購買 b 升）。假定甲乙購買的地點、時間、次數都相同。試比較哪種購買方式合算？並說明理由。（提示：比較兩者的汽油平均價格的大小）

解：甲乙分購買n次汽油，汽油每次的價格分別爲$a_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$，那麼甲購買汽油的平均價格爲 $\frac{na}{\frac{a}{a_1}+\frac{a}{a_2}+\ldots+\frac{a}{a_n}} = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$，乙買汽油的平均價格爲 $\frac{ba_1+ba_2+\ldots+ba_n}{nb} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$，

$\because \ \frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} < \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ （a_i不全相等），

$\therefore$ 甲購買汽油的平均價格小於乙買汽油的平均價格，故甲合算。

3. $\dfrac{a+b}{2} \le \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ 的應用模型

(4) 在斜邊爲定值 c 的直角三角形木塊材料中，取一面積最大的（內切）圓形木塊。圓半徑應是多少？

解：設直角三角形的兩直角邊長分別爲 a、b，由平面幾何知識可知內切圓的半徑 $r = \dfrac{a+b-c}{2} = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{c}{2} \le \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} - \dfrac{c}{2} = \sqrt{\dfrac{c^2}{2}} - \dfrac{c}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}c$（當且僅當 $a = b$ 時取等號），所以要取一面積最大的（內切）圓形木塊，圓半徑應是 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}c$。

參考文獻

[1] 劉曉東（2003）。四類平均數的幾何模型。《數學通報》2003，11。

[2] 羅增儒（1997）。《數學解學引論》。西安：陝西師範大學出版社。

[3] 余元希等（1988）。《初等代數研究》。北京：高等教育出版社。