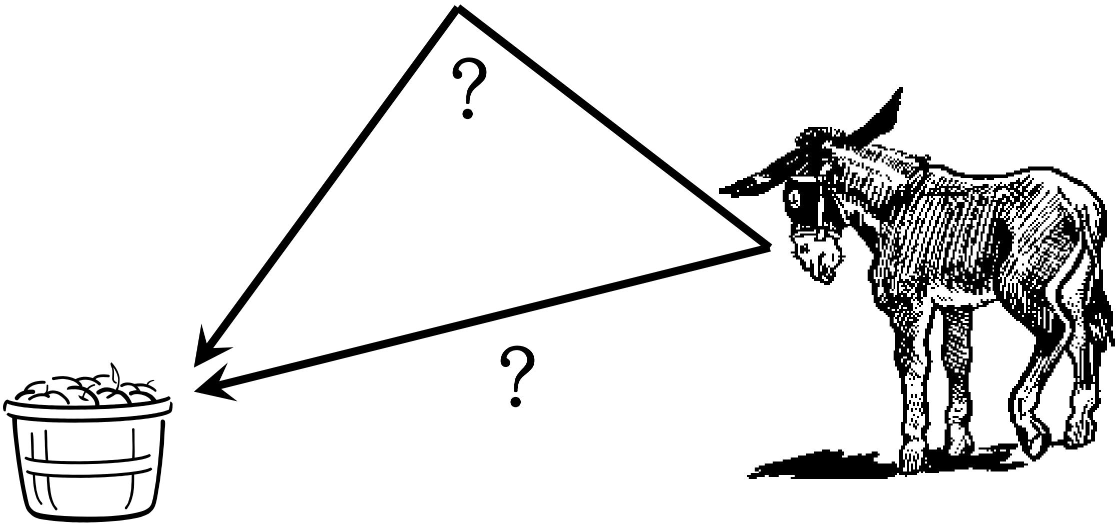
從著名不等式談數學歷史

陳宇航
香港中文大學教育學院



1. 引言

大概由人類懂得分辨數量的大小開始，不等式的概念已經誕生了。雖然我們自小學習的數學都以等式為主，但很久以前不等式已被應用來解決日常生活的問題。尤其在沒有微積分的時代，不等式都是計算最大和最小值的最佳工具（[5]），許多著名的不等式應運而生，後來理所當然地成為數學理論裡的研究對象。

或許因為不等式著重實用的緣故，也或許因為不等式本身只是一條數式那麼簡單，即使是著名的不等式也不會擁有很多專門的歷史記載。事實上，不等式的歷史滲透於整個數學歷史之中，這從難以找到一本專門介紹不等式的數學歷史書可見一斑。正因如此，本文特別選擇三個非常著名的不等式，在探討它們本身的歷史之餘，亦談談環繞它們所發生的事蹟，希望能夠勾劃出不等式在數學洪流中的風采。

本文介紹的三個不等式都甚具名氣，Jack Abad 和 Paul Abad（[16]）於 1999 年在美國數學協會（Mathematical Association of America）的會議

上，指出一百個歷史上最偉大的數學定理，它們都是榜上有名的。

2. 算術－幾何平均不等式（AM-GM inequality）

如果你曾修讀高中數學，或許對這個不等式會畢生難忘：

對於任何的正數 $a_1 , a_2 , \ldots , a_n$， $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 。當且僅當 $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ 時，不等式的兩邊相等。

2.1 起源

算術－幾何平均不等式源遠流長，最早（[4]）出現於歐幾里德（Euclid, 325 B.C. – 265 B.C.）的《幾何原本》（[6]），那裡說明了 $n = 2$ 的情況，即 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 。

事實上，《幾何原本》沒有一個命題正式指出這個不等式，但是從其他命題可以看出當時的數學家不可能不知道這個事實。

卷 II 命題 5

這個命題指出，對於任意的邊長 a , b $(a \geq b)$，可以作出圖一使長方形 $ADHK$ 的面積 + 正方形 $EGHL$ 的面積 = 正方形 $BCEF$ 的面積，即

$$ab + [\tfrac{1}{2}(a + b) - b]^2 = [\tfrac{1}{2}(a + b)]^2 \text{。}$$

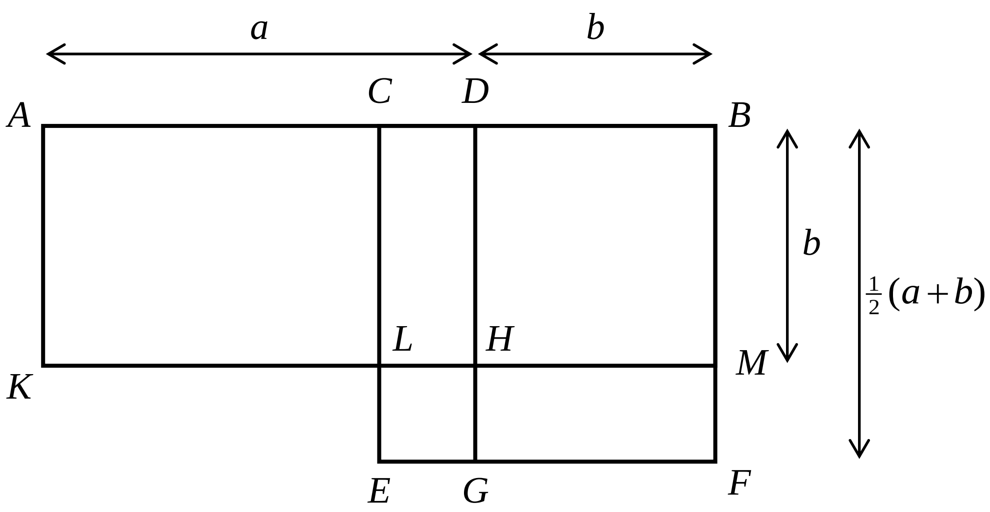


圖 一

如果我們把正方形 $EGHL$ 的面積省去，便得 $ab \leq [\tfrac{1}{2}(a + b)]^2$ 。

卷 VI 命題 13

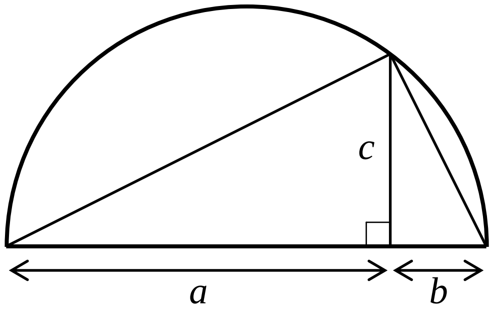


圖　二

這個命題是指出對於長度分別為 a 和 b 的線段，如何把長度等於 a 和 b 的幾何中項 $\sqrt{ab}$ 的線段繪畫出來。利用卷 VI 其他的命題，歐幾里德證明了在直徑 $a + b$ 的半圓上，c 的長度便是 $\sqrt{ab}$。

由於 c 是半圓內三角形的高，長度必定小於半徑 $\dfrac{a+b}{2}$，聰明的數學家們應該不會不知道幾何中項小於算術中項這個事實吧。

2.2 不同的證明方法

正如之前所說，微積分出現之前的時代對不等式的需求甚殷，算術－幾何平均不等式很久以前已由 $n = 2$ 被推廣成任意 n 個正數的情況，歷史上曾出現多個有關的證明，黃毅英（[8]）亦寫過一篇收錄了 14 個證明的文章，但是誰是第一個提出證明或者已經無法考究。以下介紹兩個由兩位著名數學家提出的證明。

反向歸納法（backward induction）

數學歸納法在莫洛克斯（Morlocks, 1494 – 1575）、帕斯卡（Pascal, 1623 – 1662）、伯努利（Bernoulli, 1654 – 1705）等多位數學家的推動下，於 18 世紀初開始成形（[19]）。柯西（Cauchy, 1789 – 1857）把它稍加變化，證明了算術－幾何平均不等式，這就是為後人所津津樂道的反向歸納法。名著《怎樣解題》的作者波里亞（Pólya, 1887 – 1985）在其另一本經典著作《*Inequalities*》（[2]，頁 16 – 18）中亦使用了這個證明。

柯西的方法，就是先以常見的數學歸納法，來證明 $n = 2^m$ （m 是自然數）的情況，然後再證明如果命題對於 $n = k$ 為真，則對於 $n = k - 1$ 也為真。結合兩組證明，便能證明在任意 n 個正數下的情況了。

厄多斯的證明

厄多斯（Endrös, 1913 – 1996）是近代其中一位最出色的數學家。年青時他有很多家人都被納粹黨殺害，自始居無定所，提著一個半空的行李箱，周遊列國作巡迴演講，日常生活都是依靠在演講當地的數學家款待。他喜歡提出一些看似簡單但不容易解答的數學問題，有時甚至為徵求解答而標價，而數學家都為能夠解答他的問題而感到自豪（[9]）。

厄多斯的證明方法（[8]）是在不等式 $e^x \geq 1 + x\ (x \geq -1)$ 裡代入 $x = \frac{a_r}{A_n} - 1$（A_n是所有 a_r的算術平均值），得 $1 = \prod_{r=1}^{n} e^{\frac{a_r}{A_n}-1} \geq \prod_{r=1}^{n} \frac{a_r}{A_n} = \left(\frac{G_n}{A_n}\right)^n$。

跟以上相似的題目在香港的公開試也曾多次出現。其他的證明可參考[8]。

2.3 應用

面積和邊界

算術平均是有關加法的數值，幾何平均是有關乘法的數值，算術－幾何平均不等式便把面積和邊界結合起來討論。例如：對於周界長度固定的三角形，它的面積何時才是最大呢？

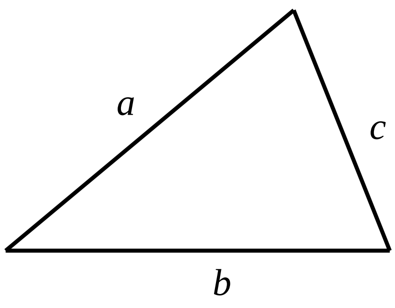


圖　三

利用公元前 3 世紀已經流傳的海龍公式（Heron's formula）：$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（$s$ 代表周界的一半，即 $s = \frac{a+b+c}{2}$），如果周界不變，那麼三角面積 A 的最大值將取決於 $(s-a)(s-b)(s-c)$ 的最大值，而算術－幾何平均不等式說明，出現這個最大值需要 $s-a = s-b = s-c$，即 $a = b = c$，由此知道答案是等邊三角形。類似的討論在微積分出現前是十分普遍的（[5]）。

其他的不等式

運用算術－幾何平均不等式，可推導出有關調和平均值（Harmonic Mean）$\dfrac{1}{\dfrac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}}{n}}$ 的不等式：

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} \ge \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$$

即得 $$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \ge \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}。$$

再加以推廣，便得到一般平均值不等式（General Means Inequality）和在凸函數的研究上不可或缺的琴生不等式（Jensen’s Inequality）（[17]）。

3. 柯西不等式（Cauchy’s inequality）

柯西不等式共有三個版本，只有最初的版本由他自己提出，那是這樣的：

對於任何的實數 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \ldots, b_n$，

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k{}^2\right)。$$

3.1 起源

柯西（Cauchy, 1789 – 1857）自小已被發現擁有驚人的數學天份，可惜身體虛弱，而且不擅寫作，數學家拉格朗日（Lagrange, 1736 – 1813）便勸籲柯西的父母在 17 歲前不要讓他接觸數學。柯西自始用心學習文學基礎，並成為歷史上舉足輕重的數學家（[10]，頁 269 – 292）。其中一項重要成就，是利用 ε - δ 符號和不等式為微分引入嚴格的定義，平息了第二次數學危機。

柯西不等式首見（[1]）於柯西在 1821 的作品中，那看來與微積分理論裡的定義不大相似，或許那只是柯西用來輔助研究的工具也說不定。

柯西不等式又稱為拉格朗日不等式（Lagrange’s inequality）（[15]），可

能是因為它可以由拉格朗日恆等式（Lagrange's identity）$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k{}^2\right) - \sum_{1\le i<j\le n}(a_i b_j - a_j b_i)^2$ 導出的緣故吧。事實上，柯西年青時常常拜讀拉格朗日和拉普拉斯（Laplace, 1749 – 1827）的著作。運用拉格朗日恆等式的證明方法是這樣的：

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k{}^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(a_i b_j - a_j b_i)^2$$
$$= \sum_{1\le i<j\le n}(a_i b_j - a_j b_i)^2 \ \ge 0$$

這個證明也在香港的純粹數學課程之內啊。

3.2 其他版本的柯西不等式

翻查柯西的數學成就，柯西不等式甚至微不足道，令這個不等式揚名立萬的，還有賴以下兩位數學家和兩個版本的柯西不等式。

柯西－許瓦爾茲不等式（Cauchy-Schwarz inequality）

許瓦爾茲（Schwarz, 1843 – 1921）生於西里西亞，即現今波蘭一帶。他最初只希望考獲化學學位，後來受有「分析學之父」之稱的外爾斯特拉斯（Weierstrass, 1815 – 1897）影響，轉而研究數學。最重要作品是他在 1884 年為外爾斯特拉斯的 70 歲大壽而做的紀念集，其中刊載了一個關於積分，但以內積空間（inner product space）的概念來表示的不等式，即

$$|\langle\psi_1(x), \psi_2(x)\rangle|^2 \le \langle\psi_1(x), \psi_1(x)\rangle \langle\psi_2(x), \psi_2(x)\rangle$$ 。（[14]）

這是柯西不等式在積分方面的推廣，因而被稱為「柯西－許瓦爾茲不等式」（Cauchy-Schwarz inequality）。但是，時至今日，我們已不會把柯西不等式與柯西－許瓦爾茲不等式區別成兩個不同的不等式，「柯西－許瓦爾茲不等式」亦會用來稱呼那個原始版本的不等式（[7]，頁 76）。

柯西－賓亞高夫斯基－許瓦爾茲不等式

賓亞高夫斯基（Bunyakovsky, 1804 – 1889）生於俄羅斯，於 1825 年在柯西的指導下於巴黎取得博士學位，及後返回俄羅斯的聖彼德堡大學任教，致力把西方的數學理論帶到俄羅斯（[13]）。在 1859 年，他把原來的柯

西不等式推廣為積分的形式：

$$\left[\int_a^b \psi_1(x)\,\psi_2(x)\,\mathrm{d}\,x\right]^2 \le \int_a^b [\psi_1(x)]^2\,\mathrm{d}\,x \int_a^b [\psi_2(x)]^2\,\mathrm{d}\,x \text{ 。}$$

事實上，賓亞高夫斯基與許瓦爾茲發現的不等式是相同的，只是表示方式不同而已。雖然賓亞高夫斯基比許瓦爾茲早 25 年發表了這個不等式，但由於當時西方數學界較少留意俄羅斯的動向，以致賓亞高夫斯基的成就一度被忘懷了。後人為了紀念這位數學家的功勞，才把他的名字加入不等式的名字內（[3]，頁 71）。

3.3 應用和推廣

柯西不等式被推廣成很多不同的定理，較著名的有在 1889 出現的赫爾德不等式（Hölder's Inequality）：

當 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 並且 $p\,,q>1$ 時，

$$\int_a^b \left|f(x)\,g(x)\right|\mathrm{d}\,x \le \left[\int_a^b \left|f(x)\right|^p\,\mathrm{d}\,x\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_a^b \left|g(x)\right|^q\,\mathrm{d}\,x\right]^{\frac{1}{q}}$$ 。（[3]，頁 67）

現在柯西不等式主要被應用於泛函分析、概率論和統計學中。

4. 三角不等式（Triangle inequality）

三角不等式有很多版本，在中學裡最常見的版本是：

對於任何的實數 a 和 b，$|a|+|b|\ge|a+b|$。

4.1 起源

顧名思義，三角不等式的最初版本是一個有關三角形的不等式：

三角形中任何兩條邊的長度之和，都比其餘一條邊的長度大。

《幾何原本》的卷 I 命題 20 也記載了這個定理，以下簡述裡面的證明：

不失一致性，我們可以假設要證明的是 $AB + AC \ge BC$。如圖四，把 BA 延長至 D，使 $AD = AC$。留意 ΔACD 是一個等腰三個形，所以 $\theta = \phi$。由於 $\angle BCD = \phi + \angle ACB > \theta$，所以 $\angle BCD$ 的對邊比 θ 的對邊長（卷 I 命題 19 已證明這一點）。於是 $BD > BC$，即是說明了 $AB + CA \ge BC$。

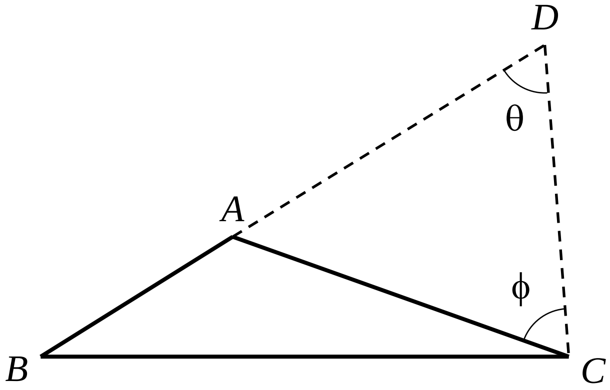


圖　四

不過，當時的哲學組織伊壁鳩魯學派（Epicurean）認為，這個定理簡單得不用證明（[12]），指出即使是一頭驢子，也懂得依直線走向眼前的食物，不會繞道而行，並嘲笑只有傻瓜才需要透過證明來肯定。歐幾里德堅持把它證明了，你的看法又如何呢？

4.2 應用

隨著西方數學在中世紀後迅速發展，例如：外爾斯特拉斯在 1814 年引入絕對值的符號、向量空間在 19 世紀初的興起等，三角不等式出現了不同版本。在多個富有研究價值的抽象空間，例如歐幾里德空間（Euclidean space，即我們常見的 $\Re^n$ 空間）、內積空間（inner product space）和 L^P 空間（$P>1$），三角不等式均以定理的角色出現（[18]）。

在中學裡我們學到，凡是在 $\Re^2$ 和 $\Re^3$ 的向量皆具有這個特性：

$$|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|\geq|\mathbf{u}+\mathbf{v}|。$$

如果 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$ 是 $\Re^n$ 空間的向量，以上便是 $\Re^n$ 的三角不等式。

本文之前介紹過的赫爾德不等式，可用來證明閔科夫斯基不等式（Minkowski inequality），而閔科夫斯基不等式正可證明三角不等式在 L^P 空間（$P>1$）是成立的。

三角不等式甚至被納入一些著名的抽象空間的定義之內（[18]），例如賦範向量空間（normed vector space）和在 1906 年才被正式命名，於拓撲學十分常見的量度空間（metric space）。

量度空間即是一個集合 M，當中的元素擁有一個函數 $d: M\times M\to\Re$，

並符合以下五個條件：

(i) $d(x, y) \geq 0$

(ii) $d(x, x) > 0$

(iii) 如果 $d(x, y) = 0$，即代表 $x = y$。

(iv) $d(x, y) = d(y, x)$

(v) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

第五個條件便是三角不等式了。在這個定義下，許多抽象空間如 $\Re^n$ 和內積空間都是量度空間。

5. 總結

古往今來，不等式在數學中扮演十分重要的角色，藉著留意不等式的發展，我們可以看到不同時代的數學歷史。對於算術－幾何平均不等式，我們見識過古希臘人的智慧，欣賞過數學大師柯西和厄多斯的風采，看到波利亞如何「識英雄重英雄」。在柯西不等式的介紹中，我們認識過柯西、許瓦爾茲和賓亞高夫斯基的生平，感受過賓亞高夫斯基那種被人搶去功勞的遺憾。至於三角不等式，我們見證一個不等式的成長，由連驢子也通曉的道理，發展成在抽象空間裡討論的大智慧。補充一點，台灣的教育研究指出（[11]），在眾多數學式子的歷史中，柯西不等式的歷史是大學和高中學生最渴望知道的。

如果還要指出更多它們受到重視的原因，那相信就是數學美了。正如大部分的不等式，它們都是結構簡單和具有對稱性（意思是，把不等式的未知數交換位置，不等式仍然成立），本身已合乎一定的美學標準。最令人拍案叫絕的是，不等號的左右兩方是恰到好處的配搭，數值較大的一方只會僅大於另一方，而且容許左右相等的情況出現，奇妙之餘亦甚具實用價值，難怪足以躋身在歷史上最偉大的 100 個數學定理之中吧。

參考資料：書本及期刊

[1] Dragomir, S.S.(2003). A Survey on Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz Type Discrete Inequality, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, volume 4, issue 3, article 63.（可在 http://jipam.vu.edu.au/volumes.php 下載）

[2] Hardy, Littlewood, Polya(1959). *Inequalities*. Cambridge University Press.

[3] Kazarinoff, N.D. (1964). *Analytic Inequalities*. USA.

[4] Niculescu, C. P. (2000). A New Look at Newton's Inequalities, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, volume 1, issue 2, article 17. （可在 http://jipam.vu.edu.au/volumes.php 下載）

[5] Nihin, P. J. (2004). Minimums, Maximums, Derivatives and Computers. *When Least Is Best : How Mathematicians Discovered Many Clever Ways to Make Things as Small (or as Large) as Possible*, Chapter 1. Princeton University Press. (可在 http://pup.princeton.edu/chapters/s7590.pdf 下載初版)

[6] 藍紀正、朱恩寬（譯）（1992）。《歐幾里德幾何原本》。九章出版社。

[7] E. 貝肯巴赫，R. 貝爾曼（著），文麗（譯）（1992）。《不等式入門》。凡異出版社。

[8] 黃毅英（1997）。從算術幾何平均不等式看數學解題中的一題多解。《邁向大眾數學的數 學教育》，頁 93 – 118。九章出版社。

[9] 蔡聰明（1997）。數學家 Paul Erdos。《數學傳播》，第 21 卷，第 4 期。

[10] 井竹君（等譯）（1998），E. T. Bell 著（1937）。古代學者的近代思想。《大數學家》（*Men of Mathematics*），頁 17 – 34。台北：九章出版社。

[11] 謝佳叡（2000）。「從對數學式子的評價探數學教師的數學觀」－數學史知識需求面相的另一種思考。《HPM 通訊》，第三卷，第十期。（可瀏覽 http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmletter.htm）

參考資料：網上資料

[12] Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles, http://www.cut-the-knot.org/manifesto/need_it.shtml

[13] MacTutor History of Mathematics, http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Bunyakovsky.html

[14] MacTutor History of Mathematics, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Schwarz.html

[15] Math World, http://mathworld.wolfram.com/LagrangesInequality.html

[16] Nathan W. Kahl, Mathematics Department, Stevens Institute of Technology, http://personal.stevens.edu/~nkahl/Top100Theorems.html

[17] PlanetMath.Org, http://planetmath.org/encyclopedia/InequalityForRealNumbers.html

[18] Wikipedia, the free encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Triangle_inequality

[19] 數學網，http://www.edp.ust.hk/math/history/