關於三角形平分線的幾何有趣性質

丁遵標
安徽省舒城具杭中學

本文建立與三角形角平分線有關的三個有趣的幾何性質。

定理 1　設t_a、t_b、t_c分別是 ΔABC的 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的角平分線長，外接圓半徑爲R，內接圓半徑爲r，則有 $\dfrac{bc}{t_a^{\ 2}}+\dfrac{ca}{t_b^{\ 2}}+\dfrac{ab}{t_c^{\ 2}}=2+\dfrac{R}{r}$ 。

證　設 ΔABC的半周長爲S。由三角形平分線公式知 $t_a=\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$ 。

$$\therefore \quad t_a^{\ 2}=\frac{4b^2c^2\cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}=\frac{2b^2c^2(1+\cos A)}{(b+c)^2}$$

$$=\frac{2b^2c^2}{(b+c)^2}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$=\frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$$

$$=\frac{4bcs(s-a)}{(2s-a)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{bc}{t_a^{\ 2}}=\frac{(2s-a)^2}{4s(s-a)}=\frac{1}{4}\frac{s}{s-a}+\frac{1}{2}+\frac{s-a}{4s}$$

同理，

$$\frac{ca}{t_b^{\ 2}}=\frac{1}{4}\frac{s}{s-b}+\frac{1}{2}+\frac{s-b}{4s}$$

$$\frac{ab}{t_c^{\ 2}}=\frac{1}{4}\frac{s}{s-c}+\frac{1}{2}+\frac{s-c}{4s}$$

$$\therefore \quad \frac{bc}{t_a^{\ 2}}+\frac{ca}{t_b^{\ 2}}+\frac{ab}{t_c^{\ 2}}$$

$$=\frac{s}{4}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\right)+\frac{3}{2}+\frac{3s-a-b-c}{4s}$$

$$=\frac{s}{4}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\right)+\frac{7}{4} \quad \text{..(1)}$$

$$\because \quad (s-a)(s-b)(s-c) = r^2 s$$

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c} = \frac{ab+bc+ca-s^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

又 $$ab+bc+ca = s^2+4Rr+r^2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c} = \frac{4Rr+r^2}{r^2 s} = \frac{4R+r}{rs} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由 (1) 和 (2) 得

$$\frac{bc}{t_a^{\ 2}}+\frac{ca}{t_b^{\ 2}}+\frac{ab}{t_c^{\ 2}} = \frac{7}{4}+\frac{s}{4}\frac{4R+r}{rs} = 2+\frac{R}{r}$$ （證完）

由 Euler 不等式 $R \geq 2r$ 知 $\frac{bc}{t_a^{\ 2}}+\frac{ca}{t_b^{\ 2}}+\frac{ab}{t_c^{\ 2}} \geq 4$。於是，我們便可得到下面的性質：

推論 設t_a、t_b、t_c分別是 ΔABC的 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的角平分線長，則有 $\frac{bc}{t_a^{\ 2}}+\frac{ca}{t_b^{\ 2}}+\frac{ab}{t_c^{\ 2}} \geq 4$。

定理 2　設t_a、t_b、t_c分別是 ΔABC的 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的角平分線長，外接圓半徑爲R，內切圓半徑爲r，則有 $\frac{1}{t_a^{\ 2}}+\frac{1}{t_b^{\ 2}}+\frac{1}{t_c^{\ 2}} \geq \frac{15R^2+4r^2}{24R^3 r}$。

證　由定理 1 已證出$t_a^2 = \frac{4bcs(s-a)}{(2s-a)^2}$。

$$\therefore \quad \frac{1}{t_a^{\ 2}} = \frac{(2s-a)^2}{4bcs(s-b)} = \frac{1}{4bc}\left(\frac{s}{s-a}+2+\frac{s-a}{s}\right)$$

$$= \frac{s}{4bc(s-a)}+\frac{3}{4bc}-\frac{a^2}{4abcs}$$

同理 $$\frac{1}{t_b^{\ 2}} = \frac{s}{4ca(s-b)}+\frac{3}{4ca}-\frac{b^2}{4abcs}$$

$$\frac{1}{t_c^{\ 2}} = \frac{s}{4ab(s-c)}+\frac{3}{4ab}-\frac{c^2}{4abcs}$$

$\because \quad abc = 4Rrs$，$(s-a)(s-b)(s-c) = r^2 s$，$R \geq 2r$，

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{1}{2Rr}\text{，}a^2+b^2+c^2=2(s^2-4Rr-r^2)\text{，}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{t_a^{\ 2}}+\frac{1}{t_b^{\ 2}}+\frac{1}{t_c^{\ 2}}$$

$$=\quad \frac{s}{4}\left(\frac{1}{bc(s-a)}+\frac{1}{ca(s-b)}+\frac{1}{ab(s-c)}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)-\frac{a^2+b^2+c^2}{4abcs}$$

$$\geq\quad \frac{3s}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2(s-a)(s-b)(s-c)}}+\frac{3}{4}\frac{1}{2Rr}-\frac{2(s^2-4Rr-r^2)}{16Rrs^2}$$

$$=\quad \frac{3s}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{16R^2r^2s^2r^2s}}+\frac{1}{4Rr}+\frac{4R+r}{8Rs^2}$$

$$=\quad \frac{3}{16Rr}\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}+\frac{1}{4Rr}+\frac{4R+r}{8Rs^2}$$

$$\geq\quad \frac{3}{8Rr}+\frac{1}{4Rr}+\frac{9r}{8Rs^2}$$

$$=\quad \frac{5}{8Rr}+\frac{9r}{8Rs^2}$$

又，易證 $s\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}R$

$$\therefore\quad \frac{1}{t_a^{\ 2}}+\frac{1}{t_b^{\ 2}}+\frac{1}{t_c^{\ 2}}$$

$$\geq\quad \frac{5}{8Rr}+\frac{9r}{8R\frac{27}{4}R^2}=\frac{5}{8Rr}+\frac{r}{6R^3}=\frac{15R^2+4r^2}{24R^3r}$$ （證完）

定理 3　設t_a、t_b、t_c分別是 ΔABC的 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的角平分線長，外接圓半徑為R，內切圓半徑為r，則有$t_at_bt_c\geq\dfrac{432R^2r^2}{31R+2r}$。

證　由定理 1 已證得$t_a^{\ 2}=\dfrac{4bcs(s-a)}{(2s-a)^2}$。

$$\therefore\quad t_a=\frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$$

同理：$t_b=\dfrac{2\sqrt{cas(s-b)}}{c+a}$，$t_c=\dfrac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b}$。

$$\therefore \quad t_a t_b t_c = \frac{8abcs\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{8\,abcs\,\Delta}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$\because \quad \Delta = rs$，$abc = 4\,Rrs$，$(a+b)(b+c)(c+a) = 2s(s^2 + 2\,Rr + r^2)$，

$$\therefore \quad t_a t_b t_c = \frac{8\cdot 4Rrs\cdot s\cdot rs}{2s(s^2+2Rr+r^2)} = \frac{16Rr^2s^2}{s^2+2Rr+r^2}$$

$$= \frac{16Rr^2}{1+\frac{2Rr+r^2}{s^2}}$$

由文 [2] 已證得 $s^2 \geq \frac{27}{2}Rr$ ，

$$\therefore \quad t_a t_b t_c \geq \frac{16Rr^2}{1+\frac{2Rr+r^2}{\frac{27}{2}Rr}} = \frac{432R^2r^2}{31R+2r}$$（證完）

參考文獻

1. 張贇（2002）。涉及三角形角平分線的又一不等式。《中等數學》2002。2
2. 丁遵標（2002）。Gerretsen 不等式的加強。《河北理科數學研究》。2002。2