

數學教學中如何引導學生學習數學美

楊澤忠

上海交通大學科學史系、山東師範大學數學系

一、引言

數學中處處有美的因素，數學教學中指導學生學習數學美是一項重要的任務。可是在實踐中我們常常會遇到這樣的情景，即當我們把數學中美的結果呈現給學生的時候，學生無動於衷。比如我們給學生介紹畢氏定理，我們把其公式、圖形和證明都寫了出來，可是學生並不為其中的美所動，依舊把它們看成是一般的數學定理和公式。再比如我們給學生介紹黃金分割，我們把它的幾何表示和算術得數都給學生指了出來，甚至聯繫到了達芬奇的人體繪畫，高聲提醒了學生這是很美的，可是學生的表情依舊默然。這是為什麼呢？這實際上涉及到一個數學美的欣賞過程問題。數學美的欣賞過程同其他美如藝術美、行為美的欣賞過程一樣，只是把美的結果擺出來——如我們以前重視的^[1-3]，或直白地告訴學生是不夠的，還必須根據審美理論，指導學生去理解、思索和欣賞才行。否則將無功而返。那麼如何根據審美理論來指導學生欣賞數學美呢？本文擬就這個問題談談自己的認識，以求教各位老師和專家。

二、審美理論

根據審美理論來引導學生理解和欣賞數學美，我們應首先瞭解審美理論。審美理論是美學這門歷史悠久的學科的一部分。此理論認為：美非固美，因人而美。就是說，美的物體並非本來就是美的，是後來經過了人們的認識加工之後才成爲美的。比如自然界的山水，其本來就是那個樣子，天生沒有什麼美不美的，後來我們都說它美，那一定是由於我們認識到了它的特色和價值，對其產生了愛戀之情。由此，我國著名的美學專家朱光潛先生有「物甲物乙」之說。他說：「物甲是自然物，物乙是自然物的客觀條件加上人的主觀條件的影響而產生的，所以已經不是純自然物，而是夾雜著人的主觀成份物，換句話說，已經是社會的物了。美感的物件不是自然物而是作爲物的形象的社會的物。^[4]」所以，我們要理解客觀物體的美首先要審美，要使客觀物體變成審美物件。

客觀物體是如何變成審美物件從而使人們感到美的呢？此理論認為：

1. 審美物件是審美主體運用自己的智慧，調動自己認知結構中的知識，自覺積極地參與審美，並進行有意義加工而形成的。也就是說，審美物件是審美主體在審美活動中意向性建構活動的產物^[5]。
2. 客觀物體能否成為審美物件取決於客體和主體之間能否構成「物件性」的關係。所謂「物件性」的關係指的是客體本來的屬性和主體感覺器官之間的適應性關係。比如聲音對於耳朵、色彩對於眼睛的適應關係等。主體和客體之間的這種「物件性」關係越強，則客體越容易變成審美物件。
3. 主體與客體的一體化的物件性關係需要廣泛的實踐活動。沒有實踐人不可能真正理解自然，不可能體會到其內在的力量。只有深入的和廣泛的實踐了，自然界的事物才能熟悉起來和親切起來，才能實現格式塔心理學講的主體心理和客體之間的同構關係。正如王夫之講的：「天地之際，新故之跡，榮落之觀，流止之幾，欣厭之色，形於吾身之以外者化也，生於吾身以內者心也；相值而相取，一俯一仰之際，幾與為通，而勃然興矣。」^[6]

三、數學教學中數學美教學的原則和要求

由上述美學理論我們可以看出，在實際的教學實踐中只是簡單的把數學中的美的因素找出來呈現給學生是不能達到教學目的的。教師把數學內容中的美的因素找出來，展現在學生的面前，這在學生的審美過程中只是引導學生走了很小的一步。這一步好比是把作好的珍稀佳肴放在飯桌上，其實離讓學生吃下去，然後消化後變成學生自己的一部分還很遙遠呢。如果要達到如此之目的，我們在實踐中還必須對此做進一步的工作。

1. 教師在呈現給學生數學美的知識之後，還須從學生的實際出發進一步講解其特性，突出其特點。

這一步是非常必要的。原因是很多的教學實踐證明，這樣可以使學生認識到這項知識和其他知識的不同，可以使學生理解其存在和學習的必要性，從而激發學生的好奇心，調動起學生學習的積極性。特別是我們在講解的時候，注意聯繫生活，從學生熟悉的實例開始，還能使學生感到學習這項知識的樂趣和價值。在此基礎上，如果再輔助以我們常用的數學美的介紹，由此，必定可以使學生產生對此內容的審美意向，也就是學生願意瞭解其中的美，渴望探討其中美的因素。

比如前面提到畢氏定理的教學，如果我們在教學的時候，通過分析、比較等方法，突出其特點，並且使其聯繫到學生熟悉的三角旗、三角支架和三角板等日常事物，學生必定能感到它有價值，願意學習，從心裏願意接受其中的數學道理。這時，如果我們再輔之以告訴學生這個定理在數學中實際上是很美的，古希臘的大數學家畢達哥拉斯曾為此興奮不已，歷史上很多數學家都曾為之奉獻了大量心血，等等，那麼學生一定會渴望學習其中的美，也願意探討和接受其中之美的。

而由前面的理論我們知道，將含有數學美的數學知識從客觀物體變成學生的審美物件，使學生有審美意向這一步又是不可缺的，所以，將含有數學美的數學知識呈現給學生之後，還應進一步解釋，使學生知道其特點。

2. 注重讓學生對數學知識進行深入思考和廣泛探究。

從前面闡述的理論我們知道，一項數學知識能否成為學生眼中美的事物，很重要的一個環節就是學生的加工。沒有學生對數學知識的加工，意向性的建構過程是不能形成的。如何才能使學生很好的加工呢？現代認知心理學告訴我們，讓學生深入探討學習過的知識，利用自己已有的知識去研究是個很好的策略。這樣，學生產生了審美意向之後，教師順其自然，引導其按照自己的興趣對這個問題繼續學習和探討，學生一定會有更多的收穫，對數學美也一定有更多的體會。

還比如畢氏定理的學習，在前面老師的恰當引導和學生掌握了其基本內容之後，此時如果教師能趁機引導學生進一步探討與之有關的問題，比如，什麼樣的三角形有關係： $a^3 + b^3 = c^3$ ，什麼樣的三角形有關係： $a^4 + b^4 = c^4$ ，……，如果沒有的話，什麼樣的圖形的邊之間有這種類似的關係；同樣是三角形，鈍角三角形三邊是什麼關係？銳角三角形三邊又是什麼關係？這個關係式和費爾瑪大定理之間有什麼關係？等等。在探討了這些問題之後，學生回過頭來必定對畢氏定理有一個新的認識，對其有一種更加親切和欣喜的感受。因為通過深入而廣泛的探討之後，學生會發現，其實只有直角三角形有這樣的關係，它是那麼獨特和不可思議。這個時候，必定有不少學生開始逐漸地理解其美妙了，有的學生此時對其開始愛不釋手了也是很有可能的。

3. 注重引導學生對含有數學美的知識進行廣泛應用。

數學美之所以被人們認識並且欣賞，一個原因是其揭示了自然界很多深層次的規律，集中反映了自然界中矛盾的對立統一。比如畢氏定理，它給出的關係式只有直角三角形的三邊能滿足，鈍角和銳角的都不能滿足——無論它們多麼靠近直角三角形。反之，在關係式 $a^n + b^n = c^n$ 中，只有當 $n = 2$ 時，它們構成的三角形才是直角三角形。這充分說明了其獨特性，是各種矛盾的對立統一。第二個原因就是其具有廣泛的應用性，能夠適用於生活的很多方面，能解決很多生活和生產方面的問題。還比如畢氏定理，古時候人們就認識到它的很多用途，周朝的商高曾說過：「平矩以正繩，偃矩以望高，覆矩以測深，臥矩以知遠，環矩以爲圓，合矩以爲方。^[7]」這表面上是在讚揚三角板，實際上是在講畢氏定理的用途。後來人們不僅用畢氏定理來測遠、測高、測深等，還用來測天量地，用來研究宇宙等。清朝數學家梅文鼎曾說過西方的三角等知識無非是於中「求勾股」罷了。能體現數學美的知識如果沒有使用價值，其美的程度將大打折扣。事實上縱觀數學歷史，越能體現數學美的知識其使用價值就越大越廣泛。

由此，爲了使學生更加深刻的理解數學知識，更好的理解其中的數學美，除了前兩項措施外，還應當引導他們廣泛的應用這些知識，瞭解其實際應用價值。當學生深刻理解了數學知識的價值，數學美的認識對他們來講也就是不言而喻的了。我的一位學生，曾經有一段時間總是對方程的知識讚不絕口。我就問他爲什麼，他說方程能解決很多問題，又快又方便。特別是和日常生活有關的一些題目。原來沒有學方程的時候，使用綜合算術的方法很傷腦筋，有的時候花了很長時間列了一個很複雜的式子，最後算出的結果還不一定是對的，可用方程的方法就非常簡單了——列出未知數，找出關係式，然後按部就班的解就是了，最後結果也基本上是一正確的——即省了心又省了力。從這裏可以看出來，讓學生動手去使用知識解決實際問題，通過解決問題來進一步理解其奧妙，是轉變學生對數學的態度，使其深刻理解數學美的有效措施。

四、結束語

數學美是數學教學的重要內容，如何在教學中使學生理解和掌握數學美呢？這要依據一般的審美原理。數學美雖與一般的美有所不同，但在審美活動中所遵循的原則還是一樣的。根據審美原理，數學教學中，不能只

是把數學中能體現數學美的例子找出來呈現給學生就結束了，除此之外，還應當結合學生的實際生活和知識情況，給學生進行深入的講解，使學生理解其中的道理，初步懂得其中的獨特性，然後再引導學生深入思考和廣泛探討，讓學生深切體會其特點，領略其中包含的矛盾對立統一性。最後，還要讓學生使用這些知識去廣泛解決實際問題。數學美的一個表現就是其能很好的巧妙的解決問題。通過讓學生解決問題，可使學生深刻體會其重要價值，從而可以使學生在數學的價值中找到美的極大亮點。不過，在這個過程中，無論是教師講解的時候，還是學生探討和應用的時候，教師都要堅持學生為主的態度，要讓學生多參與，多思考，多動手，只有這樣才能使學生有深切的體會，才能對其更好的加工。在審美的過程中，雖然有「美感移情」的說法，但那卻是短暫的和膚淺的，只有主體自己的參與和加工才能得到真正的美感。

主要參考資料

- [1] 趙珂（2002）。數學美的研究。《高等理科教育》，2002。2
- [2] 譚光權（1996）。美的特徵與數學教學。《數學教育學報》，1996。2
- [3] 葉玉樹（1999）。淺談數學美的鑒賞。《泉州師專學報》，1999。6
- [4] 朱光潛（1983）。《朱光潛選集（第三卷）》。上海：上海文藝出版社，34 頁。
- [5] 葉朗（1988）。《現代美學體系》。北京：北京大學出版社，113 – 118 頁。
- [6] 王夫之。《詩廣傳·古詩評選》。
- [7] 郭樹春（1998）。《算經十書·周髀算經》。瀋陽：遼寧教育出版社。