以 Sketchpad 畫圓錐曲線

梁子傑
香港道教聯合會青松中學

本文介紹如何應用電腦軟件 *The Geometer's Sketchpad* 繪畫圓錐曲線的兩種方法，以及討論如何將這些圖像應用於教學上。

請讀者注意，爲了方便敘述，繪圖步驟和插圖內點和線等標籤，不一定和電腦所顯示的一致。亦請讀者留意文中「直線」 和「線段」 的分別。

方法一：由定義繪圖

拋物線

定義 如果平面上的一個動點到一個定點和一條定直線的距離相等，則這個動點的軌跡叫做**拋物線**。又我們稱該定點爲**焦點**，定直線爲**準線**。

步驟

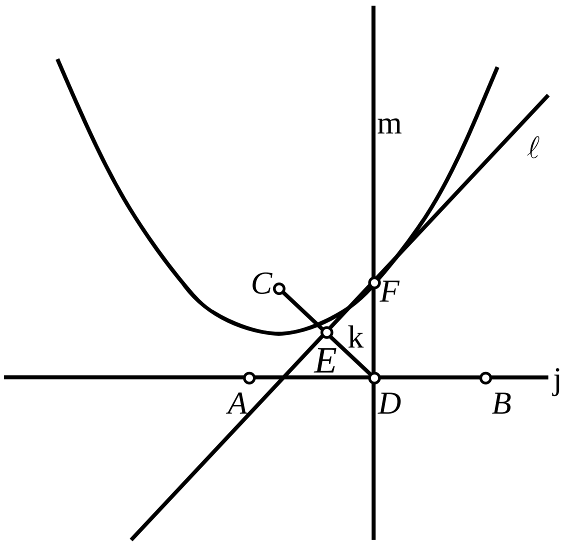

圖 一

1. 以點 *A* 和 *B* 設定直線 j。
2. 在直線 j 以外定一點 *C*，在直線 j 上定一點 *D*（最好不與 *A* 或 *B* 重複）。以線段 k 將 *C*、*D* 兩點連結。
3. 構作 k 的中點 *E*。

4. 選取 E 和 k 作垂直線 ℓ。
5. 選取 D 和 j 作垂直線 m。
6. 設定 m 和 ℓ 的交點為 F。
7. 選取 F 和 D，繪畫軌跡。F 點的軌跡就是拋物線。

解說

留意 ℓ 為 CD 的垂直平分線，故此，$CF = FD$。又因為 $m \perp j$，FD 為 F 點與 j 的距離，所以由定義得 F 的軌跡為一以 C 為焦點、j 為準線的拋物線。

橢圓

定義　如果平面上的一個動點到兩個定點距離之和等於常數，則這個動點的軌跡叫做**橢圓**。又我們稱該兩個定點為橢圓的**焦點**。

步驟

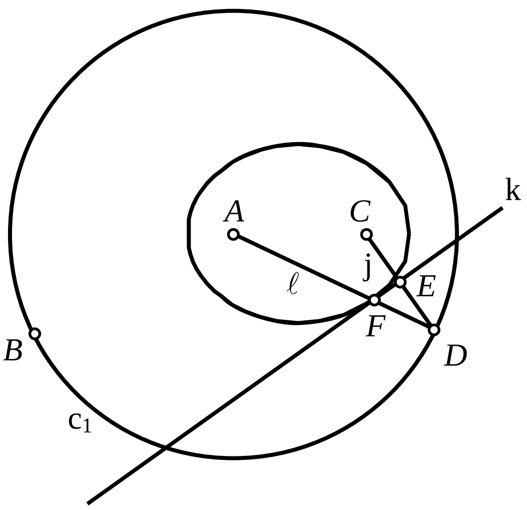

圖　二

1. 以A為圓心，B為圓周上一點，畫圓c_1。
2. 在圓c_1以內定一點C，在圓c_1上定一點D（最好不與B重複）。以線段j將C、D兩點連結。
3. 構作 j 的中點 E。
4. 選取 E 和 j 作垂直線 k。
5. 以線段 ℓ 將 A、D 兩點連結。
6. 設定 ℓ 和 k 的交點為 F。
7. 選取 F 和 D，繪畫軌跡。F 點的軌跡就是橢圓。

解說

留意k爲CD的垂直平分線，故此，$CF = FD$。因爲$AF + CF = AF + FD = AD$，即c_1的半徑，這是一個常數，所以F的軌跡爲一橢圓。

雙曲線

定義　如果平面上的一個動點到兩個定點距離之差的絕對值等於常數，則這個動點的軌跡叫做**雙曲線**。

討論　繪畫雙曲線的方法基本上和繪畫橢圓的方法相同，祇是C點應該設定於圓c_1之外，並且應該用直線連結起A、D兩點（見第 5 步），而非線段。

繪圖步驟及解說略。

方法二：以參數方程繪圖

橢圓

定理　$(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 爲橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上的一點；其中 θ 爲任意實數。

步驟

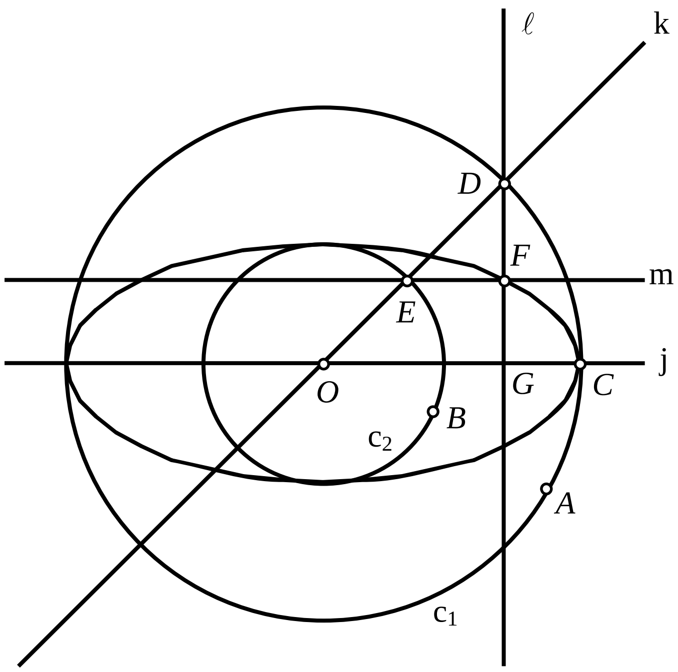

圖　三

1.　以O爲圓心，A爲圓周上一點，畫圓c_1。以O爲圓心，B爲圓周上一點，

畫圓c_2。

2. 隨意選一點 C，並以直線 j 連結 O、C 兩點。
3. 在c_1上隨意選一點D（不與A重複），並以直線k連結O、D兩點。
4. 設定c_2和k的交點爲E。
5. 選取 D 和 j 作垂直線 ℓ。
6. 選取 E 和 j 作平行線 m。
7. 設定 ℓ 和 m 的交點爲 F。
8. 選取 F 和 D，繪畫軌跡。F 點的軌跡就是橢圓。

解說

設 ℓ 和j的交點爲G，c_1的半徑爲a，c_2的半徑爲b，$\angle DOG = \theta$。
則 $OG = a\cos\theta$，而 $GF = b\sin\theta$。所以 F 的軌跡爲一橢圓。

雙曲線

定理 $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ 爲雙曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的一點；其中 θ 爲任意實數。

步驟

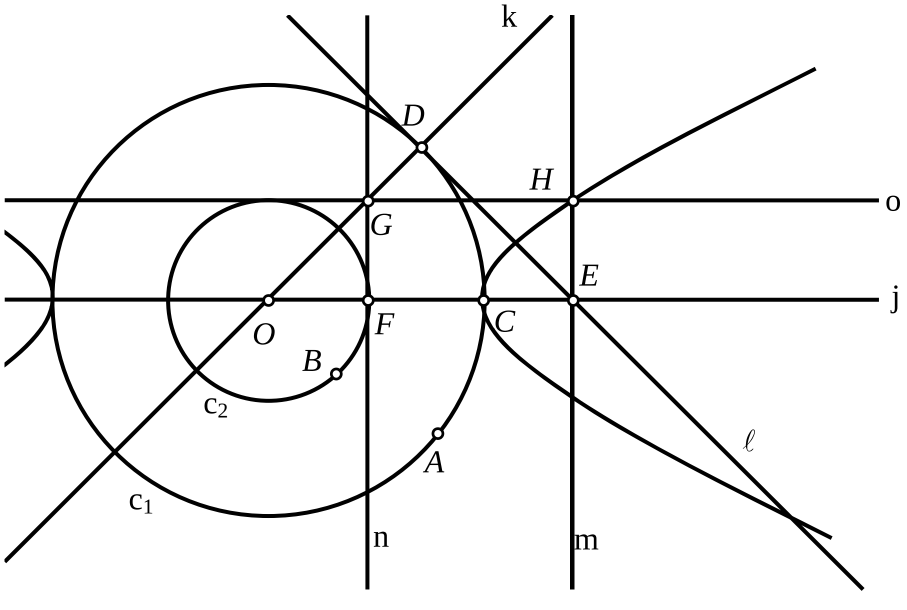

圖 四

1. 以O爲圓心，A爲圓周上一點，畫圓c_1。以O爲圓心，B爲圓周上一點，畫圓c_2。
2. 隨意選一點 C，並以直線 j 連結 O、C 兩點。

3. 在c_1上隨意選一點*D*（不與*A*重複），並以直線k連結*O*、*D*兩點。
4. 選取 *D* 和 k 作垂直線 ℓ。
5. 設定 j 和 ℓ 的交點爲 *E*。選取 *E* 和 j 作垂直線 m。
6. 設定c_2和j的交點爲*F*。選取*F*和j作垂直線n。
7. 設定 k 和 n 的交點爲 *G*。選取 *G* 和 j 作平行線 o。
8. 設定 o 和 m 的交點爲 *H*。
9. 選取 *H* 和 *D*，繪畫軌跡。*H* 點的軌跡就是雙曲線。

解說

設c_1的半徑爲a，c_2的半徑爲b，$\angle DOE = \theta$。

則 $OE = a \sec \theta$，而 $HE = GF = b \tan \theta$。所以 *H* 的軌跡爲一雙曲線。

兩種方法的比較

由定義繪圖，方法比較直接，學生須具備的基礎知識亦不多，初中學生都可以應付；以參數方程繪圖則較複雜，須對三角學有一定的認識，而且亦祇可以畫橢圓和雙曲線。不過，由定義繪圖，所得的圖象較爲粗糙，例如：當圖二中*C*點十分接近圓c_1的周界時，電腦畫面上的橢圓就會出現「起角」的現象，其他兩個作圖亦同；以參數方程繪圖則較美觀，線條圓滑。

其實，兩種繪圖方法的最大分別是，由定義繪圖，先畫出圓錐曲線的切線（即圖一和圖二中的那條垂直平分線），然後才畫出有關的曲線；而以參數方程繪圖則直接畫出有關曲線。事實上，若果要在上述的圖中再加添一條圓錐曲線的切線，那麼方法亦分成如下兩種：

以幾何方式繪畫切線

橢圓的切線

步驟

1. 畫出圖二。
2. 在橢圓上定出 *P* 點。
3. 依次序選取 *A*、*P*、*C* 三點，並構作其角平分線 m。
4. 選取 *P* 和 m 作垂直線 n。n 爲切於 *P* 點的橢圓切線。

解說

這個方法應用了圓錐曲線的光學性質來完成。以橢圓爲例，若光從橢圓其中一個焦點出發，經橢圓內側的鏡面反射後，光線必定會通過橢圓的另一

焦點。因爲當光到達橢圓上的 P 點時，光線的入射角將會等於其反射角，所以我們亦可以說通過 P 的法線將 $\angle APC$ 平分。由此祇要先畫出法線（即 $\angle APC$ 的角平分線），那麼我們就可以畫出切線了。

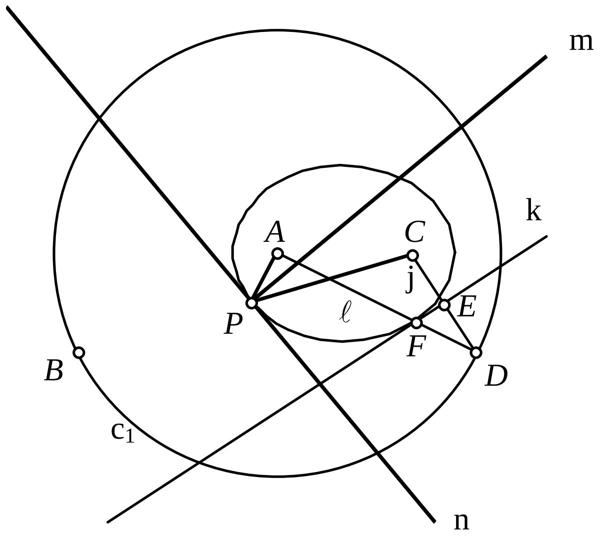

圖　五

至於拋物線和雙曲線的切線亦可用類似的方法畫出，詳細步驟從略。

以參數方程繪畫切線和漸近線

橢圓的切線

定理　通過橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上的一點 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 的切線方程爲 $\dfrac{x}{a}\cos\theta+\dfrac{y}{b}\sin\theta=1$；其中 θ 爲任意實數。

步驟

1. 畫出圖三。
2. 選取 D 和 j 作平行線 n。
3. 選取 E 和 j 作垂直線 o。
4. 設定 n 和 o 的交點爲 H。
5. 以直線 p 連結 O、H 兩點。
6. 選取 F 和 p 作垂直線 q。q 爲切於 F 點的橢圓切線。

解說

設 o 和 j 的交點爲 K。則 $HK = a\sin\theta$，而 $OK = b\cos\theta$。

∴ p 的斜率 $= \dfrac{a\sin\theta}{b\cos\theta}$，q 的斜率 $= -\dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}$ $= F$ 點切線的斜率。

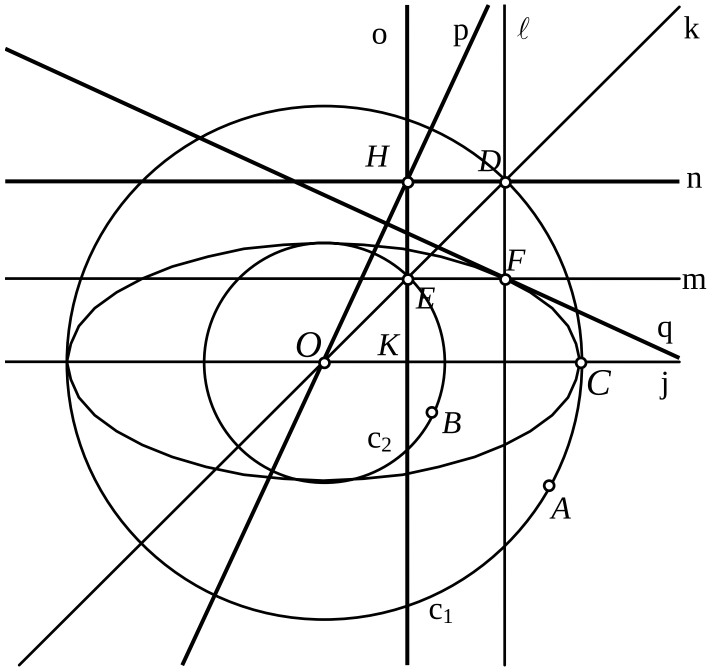

圖 六

雙曲線的切線

定理 通過雙曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上的一點 (a sec θ , b tan θ) 的切線方程爲 $\dfrac{x}{a}\sec\theta-\dfrac{y}{b}\tan\theta=1$；其中 θ 爲任意實數。

步驟

1. 畫出圖四。
2. 選取 C 和 j 作垂直線 p。設定 k 和 p 的交點爲 K。
3. 設定直線 j 爲反射軸。反射 K 點至 L。
4. 選取 L 和 j 作平行線 q。
5. 設定k和c_2的交點爲M。
6. 選取 M 和 k 作垂直線 r。設定 r 和 j 的交點爲 P。
7. 選取 P 和 j 作垂直線 s。設定 s 和 q 的交點爲 Q。
8. 以直線 t 連結 O、Q 兩點。
9. 選取 H 和 t 作垂直線 u。u 爲切於 H 點的雙曲線切線。

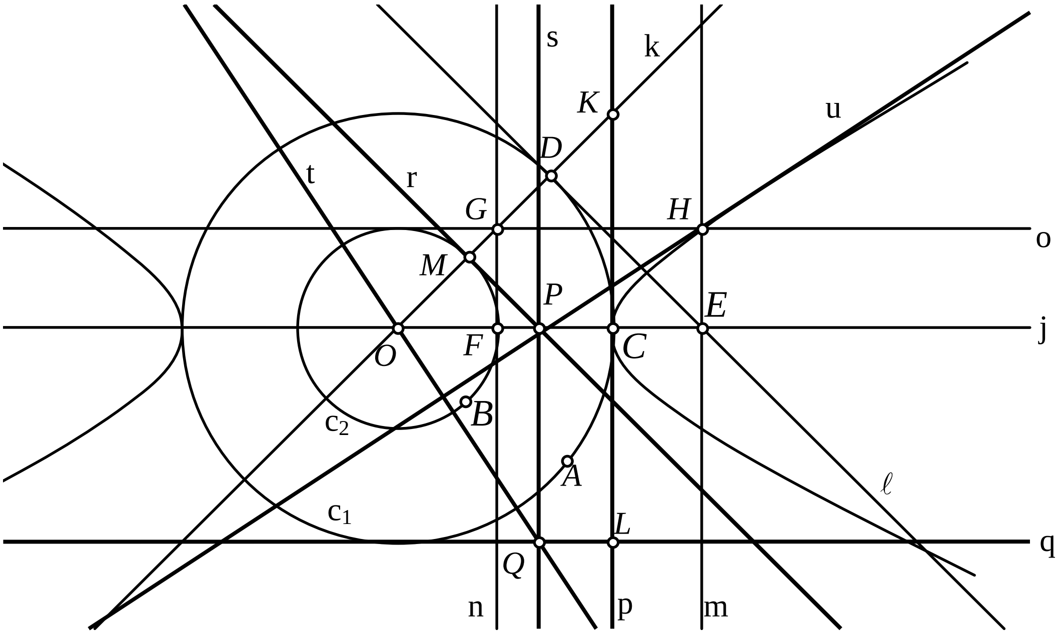

圖　七

解說

留意 $PQ = CL = CK = a\tan\theta$，而 $OP = b\sec\theta$。

$\therefore$　t 的斜率 $= -\dfrac{a\tan\theta}{b\sec\theta}$，u 的斜率 $= \dfrac{b\sec\theta}{a\tan\theta} = H$ 點切線的斜率。

雙曲線的漸近線

定理　直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ 和 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 爲雙曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的漸近線。

步驟

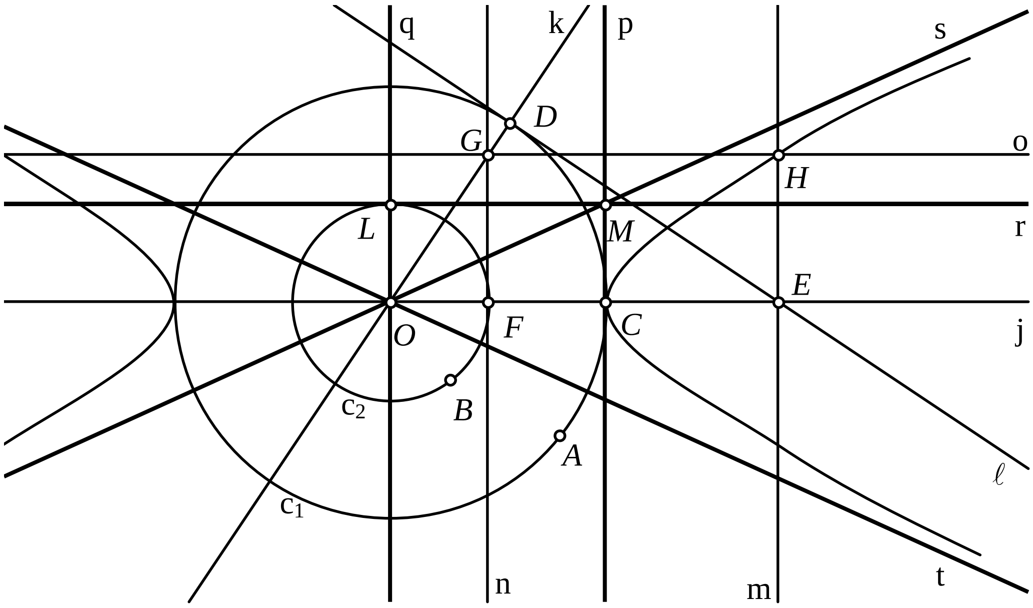

圖　八

1. 畫出圖四。
2. 選取 C 和 j 作垂直線 p。
3. 選取O和j作垂直線q。設定q和c_2的交點為L。
4. 選取 L 和 j 作平行線 r。設定 r 和 p 的交點為 M。
5. 以直線 s 連結 O、M 兩點。
6. 設定直線 j 為反射軸。將直線 s 反射為 t。則 s 和 t 為雙曲線的漸近線。

解說

明顯 $OC = a$，$MC = OL = b$。

$\therefore$ s 的斜率 $= \dfrac{b}{a}$，即漸近線的斜率。

圖八中，$OM = \sqrt{OC^2 + MC^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$，這亦即是焦點離中心點的距離。所以祇要以 O 為圓心，M 為圓周上一點畫圓，則圓與 j 的交點就是焦點位置。

教學上的應用

在書本中，我們很容易就會見到一些有關圓錐曲線的定理，例如：

定理一 若 ABC 為橢圓之內接三角形，D、E、F 分別為橢圓在 A、B、C 三點之切線和對邊的交點，則 D、E、F 三點共線。

定理二 若 O 為雙曲線的中心點，P 為雙曲線上一點， P 點上的切線分別與雙曲線的兩條漸近線相交於 A、B 兩點，則 ΔOAB 的面積為常數。

定理三 若F_1和F_2為雙曲線的焦點，P為雙曲線上一點， P點上的切線分別與雙曲線的兩條漸近線相交於A、B兩點，則A、B、F_1、F_2四點共圓。

在課堂中，當遇到這些定理時，都祇是利用坐標幾何的方法作出證明。雖然我們證實了那些定理是正確的，但學生始終對定理的內容不甚了了，感受也不夠深。使用上述的作圖技巧，我們可以讓學生親眼看到這些定理的合理性，加強他們的記憶以及對圖形的直觀能力。（當然，繪畫這些圖形不等於一個嚴謹的證明。）

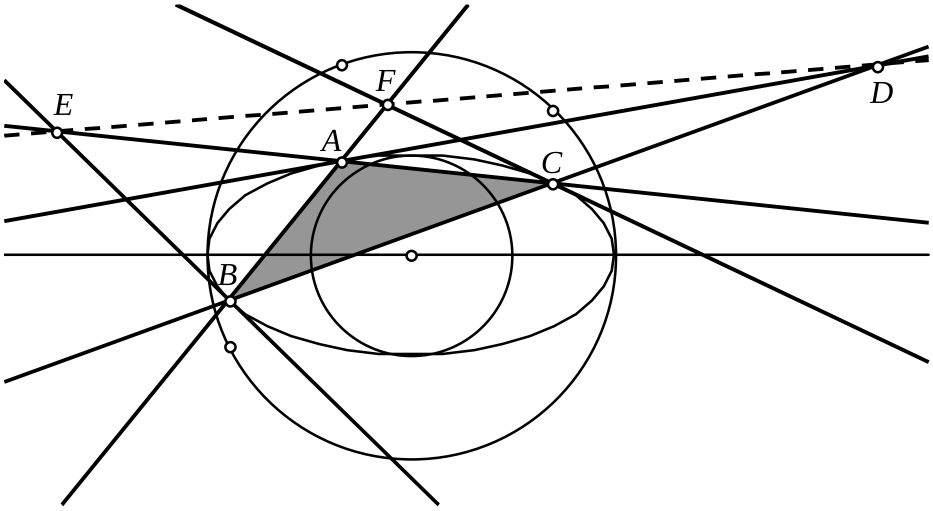

圖　九

圖九展示了定理一的圖像。我們須重複三次畫圖步驟，將三條切線畫出。同時亦應適當地隱藏一些不太重要的直線和點，以免令圖像的線條太多。授課時，老師可移動 *A*、*B*、*C* 三點的位置，借此展示 *D*、*E*、*F* 三點的確共線的事實。

我們可以利用軟件中的「量度」功能來顯示三角形的面積，亦可以利用「以三點作弧」先將三點連起，然後看看該弧是否通過第 4 點，從而展示四點共圓的關係。定理二和定理三的作圖，就留給讀者試試，這裏從略。

參考資料

Eugene A. Olmstead (1998). "Exploring the Locus Definitions of the Conic Sections." *Mathematics Teacher* 91 (May 1998): 428 – 434.

陳明哲編著（1976）。《標準解析幾何》。香港：中央書局。