Fan-Todd 不等式的又一簡證

丁遵標
安徽省舒城縣杭埠中學

Fan-Todd 不等式是指：

設 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n)$ 是兩個不成比例的實數序列，又設$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ 是使得 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ ， $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 1$ 成立的任一實數序列，則 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ge \dfrac{A}{AB - C^2}$ ，

其中 $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ ，$B = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$ ，$C = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ 。

文 [1] 給出了一種簡證。本文再給出一種更爲簡捷的證法。供參考：

證明：$\because \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ ， $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 1$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) x_i = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 1$$

由柯西不等式知 $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ge \left[\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) x_i \right]^2 = 1$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ge \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\because \quad \frac{AB - C^2}{A} = B - \frac{C^2}{A} \le B - (2C - A)^{(*)}$$

(*) 編者按： $\because \quad (A - C)^2 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad A^2 - 2AC + C^2 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad C^2 \ge 2AC - A^2$,

$\therefore \quad \dfrac{C^2}{A} \ge 2C - A$.

$$\begin{aligned} &= A + B - 2C \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i^{\ 2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^{\ 2} - 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_i^{\ 2} + b_i^{\ 2} - 2a_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2 \end{aligned}$$

即 $$\frac{AB - C^2}{A} \le \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2$$

∴ $$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2} \ge \frac{A}{AB - C^2} \quad \text{..............................(2)}$$

由 (1)、(2) 得 $$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} \ge \frac{A}{AB - C^2}$$ 。

參考文獻：

[1] 黃洛。兩個不等式的簡單證明。《安徽教育學院學報》。2002(6)。