有關雙圓四邊形的兩個不等式

張　贇
甘肅省金昌市一中

文 [1] 收錄了涉及三角形的邊長和旁切圓半徑的如下兩個不等式

$$\frac{a^2}{r_b r_c}+\frac{b^2}{r_c r_a}+\frac{c^2}{r_a r_b}\geq 4 \tag{1}$$

當且僅當三角形爲正三角形時等號成立。

$$\sqrt{\frac{a}{r_a}}+\sqrt{\frac{b}{r_b}}+\sqrt{\frac{c}{r_c}}\leq \frac{3}{2}\sqrt{\frac{s}{r}} \tag{2}$$

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，r 表示 ΔABC 的內切圓半徑。

文 [2] 將 (2) 式修正爲

$$\sqrt{\frac{a}{r_a}}+\sqrt{\frac{b}{r_b}}+\sqrt{\frac{c}{r_c}}\leq \sqrt{\frac{2s}{r}} \tag{3}$$

或

$$\sqrt{\frac{a}{r_a}}+\sqrt{\frac{b}{r_b}}+\sqrt{\frac{c}{r_c}}< \frac{3}{2}\sqrt{\frac{s}{r}} \tag{4}$$

對於 (1)、(3) 筆者經研究發現，還有相應的結果。

定理　在雙圓四邊形（即存在外接圓，又存在內切圓的四邊形稱爲雙圓四邊形）$ABCD$中，記$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$；r_a、r_b、r_c、r_d依次表示相應於a、b、c、d邊上的旁切圓半徑；r表示內切圓半徑，且$s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$，則有

$$\frac{a^3}{r_b r_c r_d}+\frac{b^3}{r_c r_d r_a}+\frac{c^3}{r_d r_a r_b}+\frac{d^3}{r_a r_b r_c}\geq 32 \tag{5}$$

當且僅當四邊形 $ABCD$ 爲正方形時等號成立。

$$\sqrt{\frac{a}{r_a}}+\sqrt{\frac{b}{r_b}}+\sqrt{\frac{c}{r_c}}+\sqrt{\frac{d}{r_d}}\leq 2\sqrt{\frac{2s}{r}} \tag{6}$$

證明 先來證明 (5) 式。

$$\frac{a^3}{r_b r_c r_d}+\frac{b^3}{r_c r_d r_a}+\frac{c^3}{r_d r_a r_b}+\frac{d^3}{r_a r_b r_c}$$

$$= \frac{1}{r_a r_b r_c r_d}(a^3 r_a + b^3 r_b + c^3 r_c + d^3 r_d)$$

$$\geq \frac{4}{r_a r_b r_c r_d}\cdot\sqrt[4]{(abcd)^3(r_a r_b r_c r_d)}$$

由文 [3] 得$r_a r_b r_c r_d = r^4$，$rs = \sqrt{abcd}$

$$\therefore \frac{4}{r_a r_b r_c r_d}\cdot\sqrt[4]{(abcd)^3(r_a r_b r_c r_d)} = \frac{4}{r^4}\sqrt[4]{r^4(abcd)^3} = \frac{4}{r^3}\sqrt[4]{(abcd)^3}$$

由 $\sqrt{abcd} = rs$ 得 $\sqrt{abcd} = r\cdot\frac{1}{2}(a+b+c+d) \geq 2r\sqrt[4]{abcd}$

$\therefore \sqrt[4]{abcd} \geq 2r$，即 $\frac{4}{r^3}\sqrt[4]{(abcd)^3} \geq \frac{4}{r^3}\cdot(2r)^3 = 32$

再來證明 (6) 式。

應用柯西不等式得

$$\sqrt{\frac{a}{r_a}}+\sqrt{\frac{b}{r_b}}+\sqrt{\frac{c}{r_c}}+\sqrt{\frac{d}{r_d}} \leq \sqrt{(1+1+1+1)(\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}+\frac{d}{r_d})}$$

$$= 2\sqrt{(\frac{a}{r_a}+\frac{c}{r_c})+(\frac{b}{r_b}+\frac{d}{r_d})}$$

由文 [3] 得 $\frac{a}{r_a}+\frac{c}{r_c}=\frac{b}{r_b}+\frac{d}{r_d}=\frac{s}{r}$

$$\therefore 2\sqrt{(\frac{a}{r_a}+\frac{c}{r_c})+(\frac{b}{r_b}+\frac{d}{r_d})} = 2\sqrt{\frac{s}{r}+\frac{s}{r}} = 2\sqrt{\frac{2s}{r}}$$

$\therefore$ (6) 式獲證。

參考文獻

[1] O. Bottema 等著，單墫譯，《幾何不等式》，北京大學出版社，1991，9：63，68

[2] 孫建斌、黃寶玲，《〈幾何不等式〉中一個不等式的糾正》，數學通報，2001，10

[3] 楊之編著，《初等數學研究的問題與課題》，湖南教育出版社，1993，5：96 – 97