

高中數學冒險活動方式

駱魁敏

江西省樂平中學

「數學冒險活動」即「選擇你自己的數學冒險活動」，最早是由美國夏威夷大學 [1] 與當地的中學合作開發的專案，在該專案中學生自己決定要解決的數學問題，設計並論證解決的策略，最終真正理解問題中的數學概念或思想。學生在這個主動學習的過程中，推理活動必須使分析、創造和實踐三方面的思維都得到充分的發揮。基於推理能力培養的數學冒險活動方式流程圖如下：

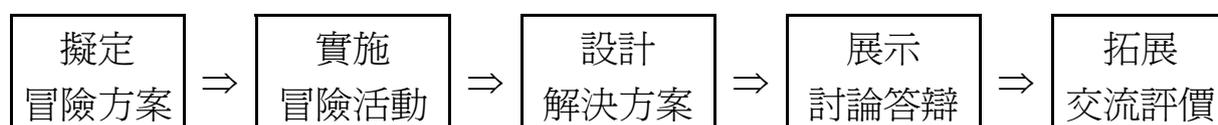


圖 1：「基於推理能力培養的數學冒險活動方式」流程圖

我們以人教社全日制普通高級中學教科書(試驗修訂本·必修)《數學》第二冊(下)第九章「直線、平面、簡單幾何體」第九節「研究性課題：多面體歐拉公式的發現」的教學為例，介紹這種「數學冒險活動」方式的操作特徵。

教師首先通過多媒體電腦展示平台，演示立方體、三棱柱、五棱柱、四棱錐、三棱錐、五棱錐、八面體、「塔頂」體(指正六面體上面是四棱錐的底)、截角立方體(截去立方體的一個角)等九個多面體。然後告訴同學們：「一個結構複雜的多面體有許多面、頂點、棱」。這種含糊的敘述幾乎任何人在立體幾何中都有接觸。然而多數人不是決心認真努力去深挖這句話的意義，並在此基礎上去探求一些更精確的知識。正確的做法應該是很清楚的識別其中包含的量，並提出一些明確的問題。

1、擬定冒險方案：寫出數學冒險的建議，與教師一起修改

每個學生都能與老師或同學討論問題的選擇，並給出相應的建議，從而學生有機會清楚表白自己的想法，從事自己選擇的問題。通過師生之間的討論，一方面可以促進學生對自己所選任務的理解，另一方面根據他人的建議，適當修正選擇的問題。如經過統計，我們發現學生提出的問題主

要有四個：

問題 1：頂點數目 V 是否都隨同面的數目 F 的增大而增大？

問題 2：頂點數目 V 是否都隨同稜的數目 E 的增大而增大？

問題 3：面的數目 F 是否都隨同稜的數目 E 的增大而增大？

問題 4：面的數目 F 、頂點數目 V 、稜的數目 E 三者之間有何聯繫？

學生在教師指導下初步擬定自己的數學冒險方案。

2、實施冒險活動：開始冒險活動，探索並記錄計算方法，如果遇到難題與同伴或教師討論

當學生開始進行問題解決時，教師鼓勵他們使用任何他們能夠想到的方法，使用任何輔助工具，如計算器（機），或用紙與筆運算，或利用數學模型，或與同學、家長、教師、專家，或通過電子郵件與有關大學、研究院的數學家聯繫。在這一階段，學生必須記錄他們的真實想法，以及發現問題和解決問題的過程，從而幫助他們明確自己的問題解決的中間過程。教師幫助學生會建立他們自己的學習檔案袋 [2]，及時對學生個人及其學習小組的記錄手冊進行評論，同時引進數學語言，以幫助學生更清楚地認識自己的思想過程。

例如，學生甲選擇問題 1，他研究了三棱錐、四棱錐、立方體、「塔頂」體多面體的面、頂點、稜的數目，用表 1 列出：

序號	多面體	面 F	頂點 V	稜 E
1	三棱錐	4	4	6
2	四棱錐	5	5	8
3	立方體	6	8	12
4	「塔頂」體	9	9	16

表 1

於是，他認為自己已解決了問題 1，他很高興的告訴老師，他成功地得到進一步的結論：「頂點數目 V 與稜的數目 E 都隨同面的數目 F 的增大而增大！」

學生乙也選擇問題 1，他起初研究了老師展示的全部九個多面體的面、頂點、棱的數目，用表 2 列出，於是，他認為自己已解決了問題 1 得到進一步的結論：「頂點數目 V 與棱的數目 E 都不是一致地隨同面的數目 F 的增大而增大！」。接著他將表 2 按 E 的增大的次序重新編排並進行觀察，又發現：「頂點數目 V 與面數目 F 都不是一致地隨同棱的數目 E 的增大而增大！」多面體的面、頂點、棱的數目之間究竟有何聯繫？他一時間陷入困境之中。

序號	多面體	面 F	頂點 V	棱 E
1	三棱錐	4	4	6
2	三棱柱	5	6	9
3	四棱錐	5	5	8
4	立方體	6	8	12
5	五棱錐	6	6	10
6	五棱柱	7	10	15
7	截角立方體	7	10	15
8	八面體	8	6	12
9	「塔頂」體	9	9	16

表 2

3、設計解決方案：寫出解決方案，與教師討論，然後再修正

一旦某個學生認為他解決了問題，就與教師進行一次簡短的交流。其目的是保證學生進行一次清晰的表達，其中包括合理使用必要的表格、圖例、說明等。通過交流，並不是檢驗學生是否獲得滿意的答案，針對這個問題留給其他同學去評價。完成問題，並不一定意味著學生得到最終結果。一些冒險活動可能需要很長時間，學生有時不能在規定時間內全部完成，他們只進行一些必要的演算法和步驟。如，學生甲只研究了四個多面體，得出他認為正確的結論。學生乙感覺到選擇的問題太難而無法解決，只能冒險到半路。一旦教師和學生都認為他們盡力而爲了，教師應該允許學生詳細描繪自己的思路，肯定其中的可取之處，此時要特別強調的是應把數學作爲一個過程，一個思考解決問題的途徑，一種培養學生論證推理（即演繹推理）與合情推理的手段，而不必是正確的答案。

例如，教師與學生乙交談，首先肯定他的成績，然後引導他修改原定的冒險方案。學生乙重新觀察自己統計的資料，發現：雖然頂點數目 V 與面數目 F 都不是始終如一地隨同稜的數目 E 的增大而增大，但「總的趨勢」似乎是增大的。於是他將表格 2 中的對應的 F 和 V 相加並作為一項，與稜的數目 E 相比較，發現一個更準確的規律：表格中的九種多面體的面、頂點、稜的數目全部滿足關係式：

$$F + V = E + 2$$

他感覺到這種規律似乎不太可能是偶然出現的。於是他提出一個猜想：

對於任何多面體來說，面數加頂點數等於稜數加二。

這猜想一定正確嗎？他心理沒有底。於是，他分別用正二十面體與正十二面體實物模型檢驗猜想，發現這兩種情形都能證實猜想。這個猜想顯得更加合理，但並未被證明，他需要作更進一步的實驗、更嚴格的檢驗。他在教師的指導下重新設計了解決方案：

(1) n 稜錐在它的 n 邊形面上增加一個「屋頂」或截去含 n 條稜的一個頂後，剛才的猜想是否成立？能證明嗎？

(2) 這個猜想是否對於任何多面體都成立嗎？如果成立，能證明嗎？如果不成立，能舉出反例或對多面體加一定的限制性的條件使之成立嗎？

4、展示討論答辯：從數學家角度展示問題解決成果，適時舉行論文答辯，進一步討論並修正

扮演數學家討論問題，是班級活動中最活躍、最有動力、最激動人心的時刻，是數學冒險活動的高潮階段。學生聽眾終於有機會瞭解班級同學近一段時間以來的研究工作，當學生希望聽到他的同學進行的有趣的問題解決時，有一種激動的感覺，學生數學家在不受干擾的情況下陳述自己的工作。每個展示結束有 15 – 30 分鐘的討論，這些討論給師生機會就數學進行有意義的對話。在報告中，學生經常認識到自己或他人作業中的錯誤，一旦出現這種情況，讓報告人完成介紹，並讓聽眾明白某一步是錯誤的或結論是錯誤的，需要加以修正。通過論文答辯、討論等形式的師生的交流，學生報告人進一步修改自己的論文，就自己的數學冒險問題的解決作第二次甚至第三次報告，讓學生體驗到數學的成功。

例如，學生乙自己發現了歐拉公式：任何一個簡單多面體的頂點數 V 、面數 F 及稜數 E 之間滿足以下特有的規律： $V + F - E = 2$ 。並瞭解到：歐拉研究多面體用了一種特別方法，即假定多面體的表面是用橡皮薄膜製作的，如果給它充氣，那麼它就會連續（不破裂、不粘連）變形，把平面變成了曲面。歐拉公式的發現與證明得益于兩大創新，即「把多面體的表面看作用橡皮薄膜製作的」（觀念的創新）與「向它們內部充氣；將底面剪掉，然後其餘各面拉開鋪平」（方法的創新）；他作了題為「試論歐拉的兩大創新」的學術報告，介紹自己發現並證明歐拉公式的曲折思維過程、收穫、成果與體驗，受到師生的好評。

5、拓展交流評價：拓展研究成果，製作掛圖或網頁，成果交流與評價

當學生完成數學冒險活動，整個冒險過程要求用掛圖或網頁形式展示出來。這一階段，學生必須自己思考如何展示他的思想以及成果。通過網路他們可以與他人（父母、兄弟姐妹、學校的其他師生、網頁遊覽者等）一起討論熟悉專案，這樣一來討論就延伸到校外，他的研究成果將更加完善。最後由教師與學生代表組成的「專家評議組」進行評比，分為一等獎、二等獎、三等獎、成功參與獎等四個層次對學生參與的數學冒險活動及其成果進行評價與獎勵。我們特別注重學生創新能力的培養與實踐活動的參與，讓每一個學生獲得親自參與研究探索的積極體驗，讓每個學生體驗科研成功的喜悅，發展對社會的責任心與使命感；培養科學態度與科學道德等。

註釋

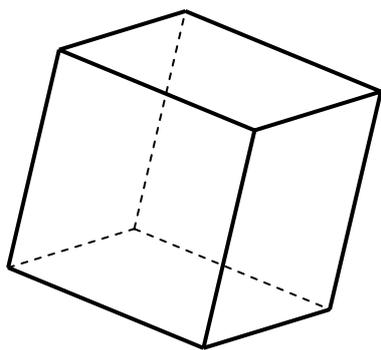
[1] 它最早是由美國夏威夷大學與當地的中學合作開發的專案，參見 Bold, G. & Levine, A. (1999) : *Adventure in Mathematics Inquiry in Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*, 1999 Yearbook, NCTM, pp. 234 – 246.

[2] 學習檔案袋的內容主要包括：(1) 課程開始時反應學生學業基礎的檔案檔或測驗結果；(2) 學生學習行為記錄，如：課堂提問、角色扮演、與同伴合作等的次數、頻率；(3) 書面作業；(4) 教師、家長對學生學習情況的觀察評語；(5) 平時測驗，由教師評分或在教師指導下同學評分／評語或自己評分／評語；(6) 學生對自己的學習態度、方法與效果的反思評語。

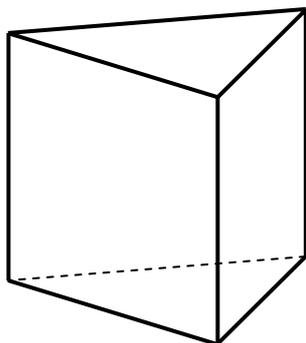
教師要求學生設置兩種學習檔案袋：一種是以一個檔夾的形式收藏（主要是每一位學生在一段時期內自己認為最有代表性的學習精品，隨時可以替換，作為學生習作展的有效資料），另一種是以一個檔案袋的形式收藏（主要是每一位學生最原始的學習記錄，

教師幫助、指導學生分類收集)。

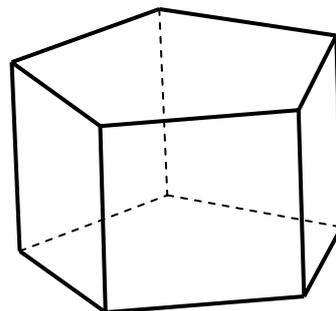
「學習檔案袋」是師生進行教學評價的主要依據之一，教師在評價過程中，學校、教師和學生一起對收集到的資料進行分析總結，對學生發展的成就、潛能和不足進行反思，進行客觀描述，對學生的考試結果等做出分析、說明和建議，形成一個分析報告。明確促進學生發展的改進要點，並用清楚、簡練、適合操作的語言表達出來，制訂改進計畫。這樣，既可看到學生發展的優勢，也可看到學生存在的不足。在評價過程中，主要從學生的課堂行為表現，學生對知識的理解、疑難問題的解答等方面進行評價。隨時關注學生的學習方法和策略；重視學生自我評價的結論和他人評價的結果。



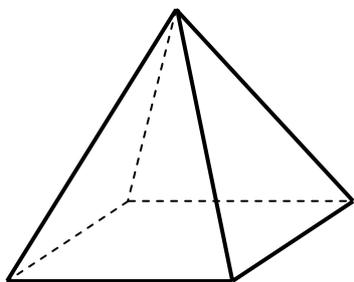
立方體



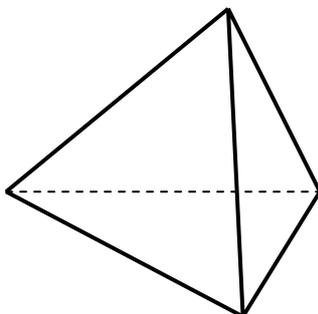
三棱柱



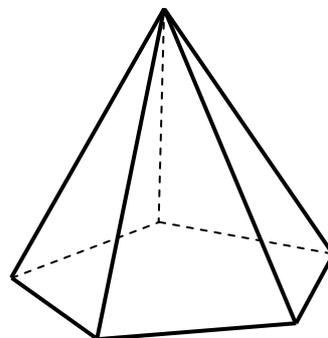
五棱柱



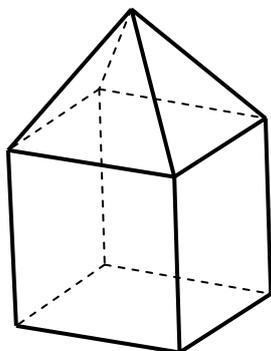
四棱錐



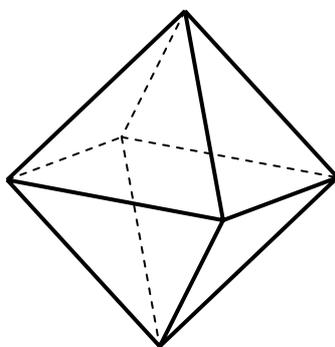
三棱錐



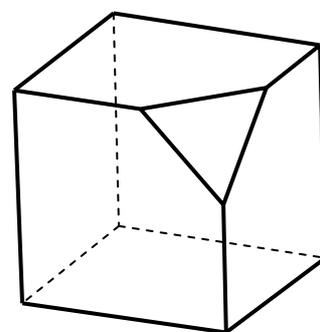
五棱錐



塔頂體



八面體



截角立方體

編者按：以上插圖由編輯室提供。