關於設計一道收斂數列習題的研究

梁子傑
香港道教聯合會青松中學

先由一道習題談起

在復旦大學數學系主編《數學分析 • 上冊》的第 135 頁中有一道習題，我覺得非常有意思，它的內容大概是這樣的：

定義數列 $\{x_n\}$ 滿足以下關係式：

$$x_0 = 1,\quad x_1 = 1 + \frac{x_0}{1+x_0},\ \ldots\ldots,\quad x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}$$

求極限 $\lim_{n\to\infty} x_n$的數值。

這題並不難解。先觀察所有的 x_n都是正數，然後由不等式

$$x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n} < 1 + \frac{x_n}{x_n} = 1 + 1 = 2$$

得知數列 $\{x_n\}$ 有上界，其値爲 2。

又，根據定義得$x_1 = \frac{3}{2}$，所以$x_1 - x_0 = \frac{1}{2} > 0$，即$x_1 > x_0$。

假設$x_k - x_{k-1} > 0$，再根據定義，得

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= \frac{x_k}{1+x_k} - \frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}} \\ &= \frac{x_k - x_{k-1}}{(1+x_k)(1+x_{k-1})} \end{aligned}$$

由於我們已假設$x_k - x_{k-1} > 0$，故此我們亦得到$x_{k+1} - x_k > 0$，即$x_{k+1} > x_k$。

所以，由數學歸納法原理可推得，$\{x_n\}$ 爲遞升數列。

因爲單調有界數列必定收斂，所以 $\{x_n\}$ 爲收斂數列。我們可設 $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$。

再從關係式$x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{1+x_n}$ 兩邊取極限，得 $\ell = 1 + \dfrac{\ell}{1+\ell}$。應用移項的技巧，得：

$$
\begin{aligned}
\ell &= 1+\frac{\ell}{1+\ell} \\
\Rightarrow \qquad \ell-1 &= \frac{\ell}{1+\ell} \\
\Rightarrow \qquad (\ell-1)(\ell+1) &= \ell \\
\Rightarrow \qquad \ell^2-1 &= \ell \\
\Rightarrow \qquad \ell^2-\ell-1 &= 0
\end{aligned}
$$

利用二次方程求根公式得 $\ell = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$。

因爲數列 $\{x_n\}$ 全爲正數，所以捨去負解，故此得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$。

我個人十分喜歡這道習題，原因有三：第一、它應用了「單調有界數列必定收斂」的原理；第二、無論是「單調」或者是「有界」，兩部分的證明都不困難；第三、在其他的習題或例題中，「上界」和「極限」的值通常都相等，但我們都明白，這並非必然，祇不過我們很難找到一些好的例子向學生解釋這一點，而這習題就可以了。故此，我亦經常借用此題於日常的教學示例之中。

美中不足

不過，這道習題亦有一個美中不足之處，就是極限並不是一個整數值。問題是，我們能否模仿上題，找到一些「上界」和「極限」不等，而「上界」和「極限」同樣是整數的數列呢？

細看上面計算極限時的步驟，不難發現，我們主要將兩個一次多項式相乘（即將 $(\ell-1)(\ell+1)$ 展開），成爲一個二次多項式，然後將等號右方的 ℓ 移到左方，從而獲得另一個二次方程。正因爲這個二次式不能以整數分解，所以答案就必須以根式表示。如果移項後的二次式亦可以分解，那麼豈不是可以得一個整數答案嗎？

換句話說，我們現在需要兩個二次式，它們的x^2項係數和常數項都相等，x項係數不同，而它們個別都可以有完整的因式分解。

這個要求不難達到，最簡單的，就是考慮 $\ell^2-5\ell-6=(\ell-6)(\ell+1)$ 和 $\ell^2-\ell-6=(\ell-3)(\ell+2)$ 了。我們可以以下面的方法，將一個數列關係式

倒推出來：

$$
\begin{aligned}
& (\ell-6)(\ell+1) &=& \ 0 \\
\Rightarrow\ & \ell^2-5\ell-6 &=& \ 0 \\
\Rightarrow\ & \ell^2-\ell-6 &=& \ 4\ell \\
\Rightarrow\ & (\ell-3)(\ell+2) &=& \ 4\ell \\
\Rightarrow\ & \ell-3 &=& \ \frac{4\ell}{\ell+2} \\
\Rightarrow\ & \ell &=& \ 3+\frac{4\ell}{\ell+2}
\end{aligned}
$$

即可設 $x_{n+1} = 3+\dfrac{4x_n}{x_n+2}$ 。

如果我們設數列的首項x_1爲 1，並依照前面的方法計算，那麼我們不難證實，以上的數列有上界 7，單調遞升，而且有一個整數的極限 6。

綜合上面的結果，可以得到以下一道我多年來經常使用的測驗題目：

設 $\{x_n\}$ 為一實數列，其中$x_1 = 1$，並對於一切正整數n，

$$x_{n+1} = 3+\frac{4x_n}{x_n+2}\text{ 。}$$

(a) 證明對於一切正整數n，$x_n < 7$。

(b) 利用數學歸納法，證明對於一切正整數n，$x_{n+1} - x_n > 0$。

(c) 求 $\lim_{n\to\infty} x_n$。

另一習題

在 2001 年香港高級程度會考純粹數學科的試卷一中，有一道題亦和極限有關，它是該卷的第 10 題。這題共分成兩部分，第一部分定義兩個數列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，然後要求考生證明這兩個數列間的某些關係。第二個部分再定義數列 $\{u_n\}$ ，使$u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ ，並由此提出以下 4 個問題：

(i) 證明$u_{n+1} = \dfrac{u_n+2}{u_n+1}$ 。

(ii) 證明$u_{2n-1} < \sqrt{2}$ 及 $u_{2n} > \sqrt{2}$ 。

(iii) 證明 $u_{n+2} = \dfrac{3u_n + 4}{2u_n + 3}$，並由此證明 $\{ u_1 , u_3 , u_5 , \ldots \}$ 為遞升數列，而 $\{ u_2 , u_4 , u_6 , \ldots \}$ 為遞降數列。

(iv) 證明 $\{ u_1 , u_3 , u_5 , \ldots \}$ 和 $\{ u_2 , u_4 , u_6 , \ldots \}$ 收斂於相同的極限，並求出該極限的數值。

在分析這個習題時我發現，假如我們將問題 (i) 的算式當作數列 $\{ u_n \}$ 的定義來處理，並將 u_1 設定為 1，那麼我們就可以將此題第一部分的 $\{ a_n \}$ 和 $\{ b_n \}$ 撇開不理，並將第二部分變成一道獨立的題目來看待。根據「考試局」提供的評卷參考，問題 (ii) 仍要第一部分的結果來完成。但我卻發現我們可以利用數學歸納法的原理和問題 (i) 的結果來完成 (ii) 的證明。方法如下：

$u_1 = 1$，明顯 $u_1 < \sqrt{2}$。

又
$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{u_n + 2}{u_n + 1} - \sqrt{2} \\
&= \frac{u_n + 2 - \sqrt{2}\,u_n - \sqrt{2}}{u_n + 1} \\
&= \frac{(1 - \sqrt{2})u_n + \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{u_n + 1} \\
&= \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - u_n)}{u_n + 1}
\end{aligned}
$$

由此我們知道，若 $u_n > \sqrt{2}$，則 $u_{n+1} < \sqrt{2}$；反之，若 $u_n < \sqrt{2}$，則 $u_{n+1} > \sqrt{2}$。故此，我們可以應用數學歸納法原理將問題 (ii) 證明。

問題 (iii) 的第一部分很簡單，祇要將問題 (i) 的算式重覆代入兩次即可：
$$
\begin{aligned}
u_{n+2} &= \frac{u_{n+1} + 2}{u_{n+1} + 1} \\
&= \frac{\frac{u_n + 2}{u_n + 1} + 2}{\frac{u_n + 2}{u_n + 1} + 1} \\
&= \frac{u_n + 2 + 2u_n + 2}{u_n + 2 + u_n + 1}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{3u_n + 4}{2u_n + 3}$$

由此得，$$u_{n+2} - u_n = \frac{3u_n + 4}{2u_n + 3} - \frac{3u_{n-2} + 4}{2u_{n-2} + 3}$$
$$= \frac{u_n - u_{n-2}}{(2u_n + 3)(2u_{n-2} + 3)}$$

同樣，再由數學歸納法原理可以知道，$\{ u_1 , u_3 , u_5 , \ldots \}$ 為遞升數列，而 $\{ u_2 , u_4 , u_6 , \ldots \}$ 為遞降數列。

問題 (iv) 的證明同樣使用了「單調有界數列必定收斂」的原理來完成。由問題 (ii) 和問題 (iii) 的結果可知 $\{ u_1 , u_3 , u_5 , \ldots \}$ 為單調有界數列，所以收斂。如果設 $\lim_{n\to\infty} u_{2n-1} = \ell$，那麼由關係式 $u_{n+2} = \dfrac{3u_n + 4}{2u_n + 3}$ 可得

$$\ell = \frac{3\ell + 4}{2\ell + 3}$$

$$\Rightarrow \quad \ell(2\ell + 3) = 3\ell + 4$$
$$\Rightarrow \quad 2\ell^2 + 3\ell = 3\ell + 4$$
$$\Rightarrow \quad \ell^2 = 2$$

將兩邊開方並取正值，得 $\lim_{n\to\infty} u_{2n-1} = \ell = \sqrt{2}$。類似地，可以證明 $\lim_{n\to\infty} u_{2n} = \sqrt{2}$。

我對此題感到興趣的原因，是因為它是一個以「雙單形式收斂」的例子。所謂以「雙單形式收斂」，就好像問題 (iii) 和問題 (iv) 般，可以按下標的數值，將 $\{ u_n \}$ 分拆成雙數和單數兩個數列，其中一個遞升，另一個遞降，再按「單調有界數列必定收斂」的原理證得它們趨向於同一極限。換句話說，整個數列 $\{ u_n \}$ 也是收斂的，而它的極限亦同樣是單數數列和雙數數列的極限。

惡習難除

所謂「惡習難除」，當我見到這道有趣而美妙的題目時，我又希望自行設計一些類似的習作出來。同樣，這題目極限是 $\sqrt{2}$，並不是一個整數。很自然地我又問：到底可否找到一個有整數極限而又以雙單形式收斂的數列呢？怎樣做？

為了要更進一步明瞭這個數列的性質，我於是寫出一個更一般的數列關係式：$x_{n+1} = \dfrac{a x_n + b}{c x_n + d}$，而我的目的就是要找出$a$、$b$、$c$和$d$的關係，使數列有整數極限，同時以雙單形式收斂。

回看上面的問題 (i) 及問題 (iii)，很容易地就知道，滿足上述一般式的數列，至少會有兩個可能：一、以雙單形式收斂；二、單調收斂。（當然，亦會有其他的可能性，後面會有討論。）

另外，深入地想想亦會發現，這個一般式亦適合之前提及在《數學分析》一書中的習題！

留意：
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + \frac{x_n}{1+x_n} \\ &= \frac{(1+x_n)+x_n}{1+x_n} \\ &= \frac{2x_n+1}{x_n+1} \end{aligned}$$

這亦即是當 $a = 2$、$b = c = d = 1$ 的特殊情況。

這個發現令我相信我們可以依照前面提過的方法，先寫出一個有整數解的方程，然後倒過來構作今次的數列。

例如：

$$\begin{aligned} & (\ell-6)(\ell+1) &=&\ 0 \\ \Rightarrow\ & \ell^2-5\ell-6 &=&\ 0 \\ \Rightarrow\ & \ell^2+2\ell &=&\ 7\ell+6 \\ \Rightarrow\ & \ell &=&\ \frac{7\ell+6}{\ell+2} \end{aligned}$$

即 $$x_{n+1} = \frac{7x_n+6}{x_n+2} \quad \text{.......................................} \quad (1)$$

又例如：
$$\begin{aligned} & \ell^2-5\ell-6 &=&\ 0 \\ \Rightarrow\ & \ell^2 &=&\ 5\ell+6 \\ \Rightarrow\ & \ell &=&\ \frac{5\ell+6}{\ell} \end{aligned}$$

即 $$x_{n+1} = \frac{5x_n + 6}{x_n} \quad \text{...} \quad (2)$$

又或者有 $$x_{n+1} = \frac{x_n + 6}{x_n - 4} \quad \text{...} \quad (3)$$

以上的三個數列，全部都由相同的二次方程求得，當然期望它們會收歛於相同的極限，問題是如何判別它們會以雙單形式還是以單調形式收歛罷了。

在茫無頭緒的情況下，我認爲最容易和最快捷的方法，就是借用電腦的試算表將數列中的每一項數字計算出來。

如果設數列的首項$x_1 = 1$，那麼計算出來的結果如下：數列 (1) 以單調（遞升）形式收歛於 6；數列 (2) 以雙單形式收歛於 6；數列 (3) 以雙單形式收歛，但卻收歛於 -1（即方程 $\ell^2 - 5\ell - 6 = 0$ 的另一個解）！

起初我還以爲自己已是成功在望的了，但上面的結果卻顯示我還要進一步研究，尤其是爲甚麼數列 (3) 會收歛於 -1 而非 6 呢？。由此，我提出了兩個問題：一、如何判別該數列以哪一種形式收歛？二、如何保證設計出來的數列，會收歛於我期望的極根（即方程的正數解）呢？

<u>柳暗花明</u>

有一天，當我預習一些有關函數一一對應性質的習題時，我遇到一個寫成 $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ 形式的函數。當時我想：「這不就是上面我所提出那個數列關係的一般公式嗎？」於是，我就改用一個繪畫函數圖像的繪圖軟件來分析這個問題。原來，答案就在那裏！

圖一、二和三中，分別繪畫出函數 $f(x) = \dfrac{7x+6}{x+2}$、$f(x) = \dfrac{5x+6}{x}$ 和 $f(x) = \dfrac{x+6}{x-4}$ 的圖像。同時，在每一幅圖中，亦加入了一條直線 $y = x$，這樣就可以在圖像上推算出數列 $\{ x_n \}$ 的每一項數值。方法是這樣的：首先從$x_1 = 1$ 開始，由圖像求出 $f(x_1)$（即x_2）的數值，利用$y = x$這條直線，就可以將x_2的值由y軸的方向「反映」到x軸上。因此，就可以再由$y = f(x)$ 的圖像繼續求得數列餘下的每一個數。

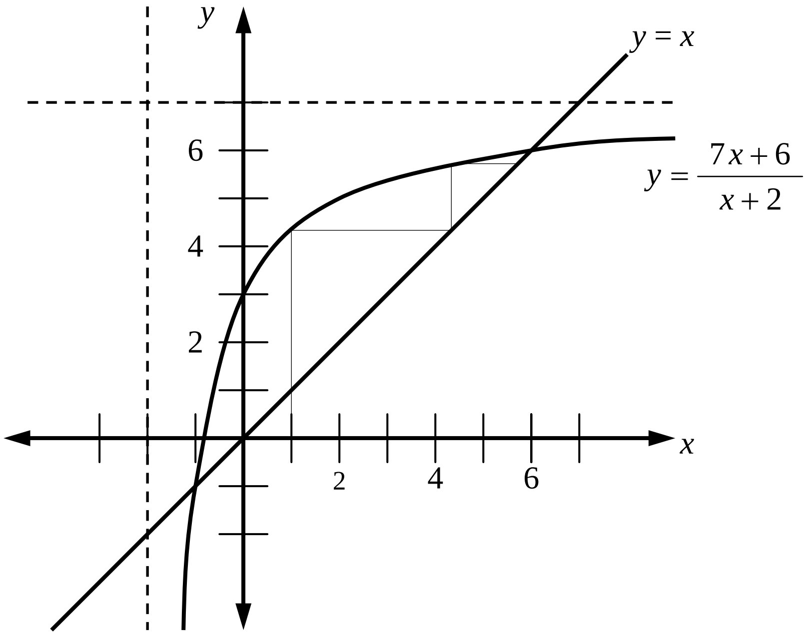

圖　一

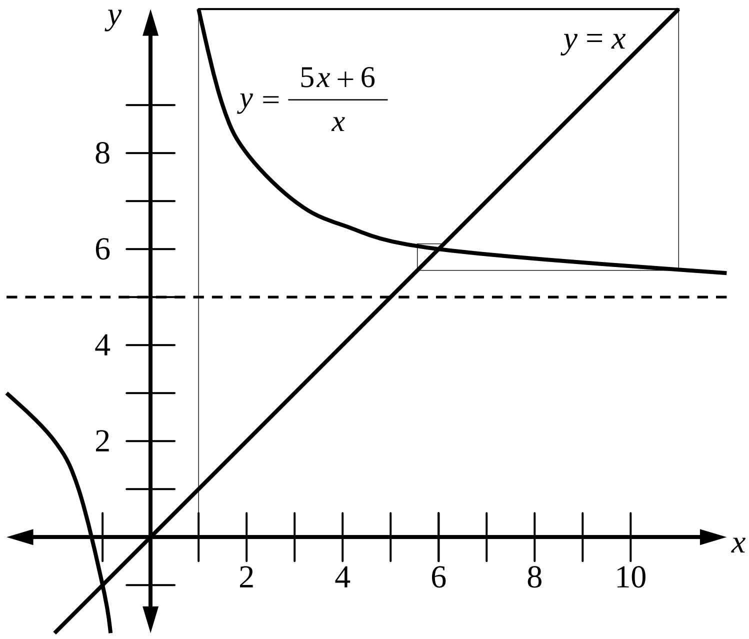

圖　二

由圖所見，當曲線的開口向下並和直線 $y = x$ 圍成一個封閉範圍時（如圖一），數列會以單調形式收歛；當曲線開口向上時，數列就會圍著極限點轉動（如圖二），所以它就會以雙單形式收歛。由於判別圖像開口向上或向下的工具是二階導數，因此，祇要推算出該函數二階導數的結果，自然可以判斷它以哪一種形式收歛了！

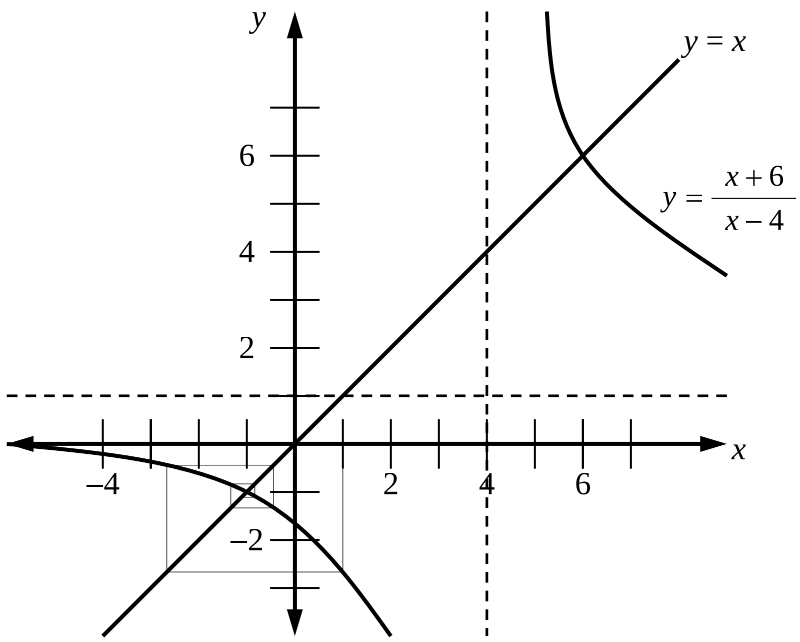

圖　三

真相漸露

這裏　　$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

所以　　$f'(x) = \dfrac{(cx+d)a-(ax+b)c}{(cx+d)^2}$

$$= \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

由此得　　$f''(x) = -\dfrac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}$

因此，假如我們設$c > 0$ 和$x_n > -\dfrac{d}{c}$（在後面的討論中，會進一步解釋這兩個假設的意義），那麼我們就知道，當行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc > 0$ 時，$f''(x) < 0$，圖像開口向下，數列會以單調形式收斂。相反，當行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0$ 時，數列就會以雙單形式收斂了。大家可以通過上面的數列 (1) 和 (2) 來驗證這一結果。

最後，就要解決為何數列 (3) 會收斂於 –1 的問題了。

細看前面的三幅圖亦不難發現，圖中的每一條曲線，都有一條垂直的漸近線和一條水平的漸近線（即圖中的虛線；圖二的垂直漸近線為 y 軸本身），因此我猜想這些曲線應該是雙曲線的一個部分！事實上，將方程 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ 移項後可以得到 $cxy - ax + dy - b = 0$。這是一條斜放著的雙曲線方程。

留意：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} = \frac{a}{c}$$

又，若 $cx + d = 0$，則 $x = -\dfrac{d}{c}$。所以，雙曲線的水平漸近線方程為 $y = \dfrac{a}{c}$，垂直漸近線為 $x = -\dfrac{d}{c}$，而雙曲線的中心點坐標（即兩條漸近線的交點）則為 $\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$。從圖二及圖三可以看到，兩圖的主要分別是圖二的中心點位於直線 $y = x$ 的上方（即 $y > x$），而圖三的中心點則位於 $y = x$ 的下方（即 $y < x$）。換句話說，若果我們希望構作出來的數列會收斂於方程較大的那一個解，那麼我們就需要 $\dfrac{a}{c} > -\dfrac{d}{c}$ 了。又如果我們仍然假設 $c > 0$，那麼我們就即是需要 $a > -d$ 或 $a + d > 0$ 了。上面的例中，數列 (2) 的 $a + d = 5 > 0$，所以收斂於 6；而數列 (3) 的 $a + d = -3 < 0$，所以收斂於 -1。

另外，有兩點亦值得注意：一、如果雙曲線和直線不相交，那麼極限點就不會存在，數列亦自然不會收斂（不過，由於我們先從二次方程倒推出數列的關係式，所以雙曲線和直線不相交的現象是不會出現的）；二、如果雙曲線的中心點剛好位於直線 $y = x$ 之上（即 $a + d = 0$ 時），由於雙曲線變成對稱於 $y = x$，因此數列亦不會收斂，祇會不停地循環於兩個數字之間。（不難證明：當 $a + d = 0$ 時，函數 $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ 就是自身的逆函數，即 $f(f(x)) = x$。）

大功告成

總而言之，如果要設計一個類似本文所討論的收斂數列，那麼我們可以先寫出一條二次方程$Ax^2 + Bx + C = 0$（$A > 0$），然後推出數列關係式$x_{n+1} = \dfrac{a x_n + b}{c x_n + d}$，其中$c = A$（$> 0$），$b = -C$，$d - a = B$，$a + d > 0$，並且將數列的首項$x_1$定爲大於 $-\dfrac{d}{c}$ 的數值（即將數列的「起點」定在垂直漸近線的右方），祇要行列式$ad - bc > 0$（這就完全取決於我們如何將B值分拆成a和d了），我們就會得到一個單調收斂的數列；又當$ad - bc < 0$時，我們就會得到一個以雙單形式收斂的數列了。

更進一步

前面討論過的會考題問題 (ii) 中，考生要證明數列的界限等於 $\sqrt{2}$ ，但 $\sqrt{2}$ 同時是數列的極限，這樣做就會出現界限等於極限的情況。其實我們祇要將問題轉一轉，就可以得到一個更美妙的做法，並且可得到一個界限和極限不同的現象。

從圖二中我們見到，即使單數數列是遞升的，但在它當中的每一個數字都會比雙數數列中的任何一個數字爲小，所以，如果我們可以證實$x_{2n-1} < x_{2n}$，那麼我們就會有不等式$x_1 < x_3 < \ldots < x_{2n-1} < x_{2n} < \ldots < x_4 < x_2$。換句話說，單數數列的上界將會是$x_2$，而雙數數列的下界則會是$x_1$了。

因此，我們可以將原習題改寫爲以下的形式：

設 {x_n} 為一實數列，其中$x_1 = 1$，並對於一切正整數n，$x_{n+1} = \dfrac{x_n + 2}{x_n + 1}$。

(a) 證明$x_{n+2} = \dfrac{3x_n + 4}{2x_n + 3}$，並由此證明 {$x_1, x_3, x_5, \ldots$} 為遞升數列，而 {$x_2, x_4, x_6, \ldots$} 為遞降數列。

(b) 證明$x_{2n-1} < x_{2n}$。並由此證明 {$x_1, x_3, x_5, \ldots$} 的上界為x_2，{$x_2, x_4, x_6, \ldots$} 的下界為 x_1。

(c) 證明 {$x_1, x_3, x_5, \ldots$} 和 {$x_2, x_4, x_6, \ldots$} 收斂於相同的極限，並求出該極限的數值。

大家是否同意，以上問題是不是更有趣的嗎？（當然，如果學生解難

的能力較弱，我們還要加插一些額外的提示。）

至於$x_{2n-1} < x_{2n}$的證明，我們可以考慮以下一個較具一般性的計算方法：

考慮
$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{a\,x_n + b}{c\,x_n + d} - \frac{a\,x_{n-1} + b}{c\,x_{n-1} + d} \\ &= \frac{ad\,x_n + bc\,x_{n-1} - ad\,x_{n-1} - bc\,x_n}{(c\,x_n + d)(c\,x_{n-1} + d)} \\ &= \frac{(ad - bc)(x_n - x_{n-1})}{(c\,x_n + d)(c\,x_{n-1} + d)} \end{aligned}$$

在這裏，我們可以更清楚地看到行列式 $ad - bc$ 的正負值與數列以哪一種形式收斂的關係。

當 $ad - bc > 0$ 時，由數學歸納法原理可知，數列會單調遞升或遞降。

當$ad - bc < 0$ 時，數列數值的大小就會不斷地反複，如果$x_1 < x_2$，那麼$x_2 > x_3$、$x_3 < x_4$、…… 等等，即$x_{2n-1} < x_{2n}$，但$x_{2n} > x_{2n+1}$。再加上，數列 $\{ x_1 , x_3 , x_5 , \ldots \}$ 和 $\{ x_2 , x_4 , x_6 , \ldots \}$ 之中，必定有一個單調遞升，另一個單調遞降（這個證明不難，亦和行列式的正負值有關，大家不妨自行證明），故此原數列 $\{ x_n \}$ 就會以雙單形式收斂了。

最後，有一點亦值得一提，就是如何計算出數列 (1) 的上界呢？

從圖一觀察可知，由於曲線位於水平漸近線之下，故此數列中的每一個數都應該小於該水平漸近線的數值。因此，我們可以知道$x_{n+1} = \dfrac{a\,x_n + b}{c\,x_n + d}$ 的上界應等於 $\dfrac{a}{c}$。這個證明並不難，當中的主要步驟亦和那行列式 $ad - bc$ 有關。詳細證明就留給讀者試試，這裏從略。