幾個小巧的「類費馬猜想」

黃志華

當整數 $n > 2$ 時，方程

(1) $x^n + y^n = z^n$

沒有整數解。

這個祇需高小程度就能看得明白的數學命題，就是著名的費馬猜想。它經過世界各國數學家三百五十餘年的不懈努力，前仆後繼，終於完全解決了。可以說，當中是積累了多代數學家的尖端智慧的。

有關這個著名的數學猜想的無數激動人心的故事，老師們不難從一批以此爲專題的書中找到，然後挑選一些饒有趣味的情節講述給學生聽，相信是很能激發學生們對數學的興趣的。不過，數學家用以解決這個問題的深奧方法及精微思想，則不大可能明明白白的講解給中學生知道。可是對此我們也不必感到遺憾，因爲不少類似費馬定理的不定方程，其解法簡單、小巧而美妙，是一般中學生都能理解的。假如讓他們試試親自尋求這些不定方程的解決方法，那無疑像是一個小小的難題橫亙在他們面前，而對於敢於面對難題的學生，求解時也許會產生代入感，覺得自己正在進攻費馬問題。

不管學生們最後能否親自尋出解決之道，但那求解過程和經驗肯定是既富趣味又很寶貴的。

以下介紹幾個「類費馬猜想」的不定方程問題，供讀者參考。

命題一

不定方程$a^2 + b^2 = c^2$的通解可表爲

$$a = r^2 - s^2, \quad b = 2rs, \quad c = r^2 + s^2$$

其中 $r > s$，r 與 s 互素。

現試求不定方程

(2) $$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}$$

的通解。

命題一解法

(2) 式可變形爲 $(xz)^2+(yz)^2=(xy)^2$，現命

(3) $$ac=x\,,\quad bc=y\,,\quad ab=z$$

其中a、b、c兩兩互素，則 $(xz)^2+(yz)^2=(xy)^2$ 相當於

$$(a^2bc)^2+(ab^2c)^2=(abc^2)^2\ ,$$

全式除以 $(abc)^2$，便得$a^2+b^2=c^2$。由命題已知

$$a=r^2-s^2\,,\quad b=2rs\,,\quad c=r^2+s^2\ ,$$

所以由 (3) 式，我們即可得 (2) 式的通解

$$\begin{aligned} x &= ac = (r^2-s^2)(r^2+s^2)=r^4-s^4 \\ y &= bc = 2rs(r^2+s^2) \\ z &= ab = 2rs(r^2-s^2) \end{aligned}$$

命題二

證明對於任一正整數 n，

(4) $$x^n+y^n=z^{n+1}$$

有無窮組 x、y、z 兩兩互不相等的正整數解。

證明

設 a、b 爲任意兩個不相等的正整數，命

(5) $$x=a(a^n+b^n)\,,\quad y=b(a^n+b^n)\,,\quad z=a^n+b^n$$

則 $$\begin{aligned} x^n+y^n &= [a(a^n+b^n)]^n+[b(a^n+b^n)]^n \\ &= a^n(a^n+b^n)^n+b^n(a^n+b^n)^n \\ &= (a^n+b^n)^n(a^n+b^n) \\ &= (a^n+b^n)^{n+1} \\ &= z^{n+1} \end{aligned}$$

命題二得證。

命題三

證明對於任一正整數 n，

(6) $$x^n + y^n = z^{n-1}$$

有無窮組 x、y、z 兩兩互不相等的正整數解。

<u>證明</u>

設 a、b 爲任意兩個不相等的正整數，命

(7) $$x = a(a^n + b^n)^{n-2}, \quad y = b(a^n + b^n)^{n-2}, \quad z = (a^n + b^n)^{n-1}$$

則
$$\begin{aligned} x^n + y^n &= [a(a^n + b^n)^{n-2}]^n + [b(a^n + b^n)^{n-2}]^n \\ &= a^n (a^n + b^n)^{n^2-2n} + b^n (a^n + b^n)^{n^2-2n} \\ &= (a^n + b^n)^{n^2-2n} (a^n + b^n) \\ &= (a^n + b^n)^{(n-1)^2} \\ &= [(a^n + b^n)^{n-1}]^{n-1} \\ &= z^{n-1} \end{aligned}$$

命題三得證。

命題二和命題三的證明看來都簡短復容易，可是要構想出 (5) 式和 (7) 式中各數的巧妙關係，肯定要一番折騰，短者兩三天，長者也許數星期，祇是，比起三百五十餘年，那就完全沒得比了。筆者覺得，假如我們懂得運用「以退爲進」的策略，先研究特殊而簡單的例子，待在局部上取得成功後，再進而看看能否推廣到一般情況，這樣應會較易構想出所需的數字關係。這「以退爲進」的策略，乃數學研究常用之法，很應該讓學生學會運用。

以命題二爲例，我們何妨先研究 $n = 1$ 的情況，即

$$x^1 + y^1 = z^2$$

這時，設$z = a + b$，則$z^2 = a^2 + 2ab + b^2$，我們怎樣拆分等號右邊那三個項呢？一個比較平衡的拆分方法便是拆爲$a^2 + ab$和$ab + b^2$，即可命

$$x = a^2 + ab = a(a + b)$$
$$y = ab + b^2 = b(a + b)$$

接下來，我們可以進一步看看 $n = 2$ 時會否有類似的情況？$n = 3, 4, \ldots\ldots$ 等等又如何？這樣，我們應該不難尋得 (5) 式中各數的關係。

<u>命題四</u>

請證明，如果 pr 與 q 互素，則不定方程

(8) $x^{p}+y^{q}=z^{r}$

有無窮組 x、y、z 兩兩互不相等的正整數解。

證明

由於 pr 與 q 互素，故必存在正整數 m、n，使

$$mq-npr=1$$

設 $d\geq 2$，我們有

$$\begin{aligned}&[(d^{r}-1)^{nr}]^{p}+[(d^{r}-1)^{m}]^{q}\\ =\ &(d^{r}-1)^{npr}[1+(d^{r}-1)^{mq-npr}]\\ =\ &(d^{r}-1)^{npr}[1+(d^{r}-1)]\\ =\ &(d^{r}-1)^{npr}\times d^{r}\\ =\ &[(d^{r}-1)^{np}\times d]^{r}\end{aligned}$$

由此即可得到 (8) 式無窮組正整數解

$$x=(d^{r}-1)^{nr}$$

$$y=(d^{r}-1)^{m}$$

$$z=(d^{r}-1)^{np}\times d$$

命題四由此得證。

命題五

證明對於任一正整數 n，

(9) $x^{\frac{1}{n}}+y^{\frac{1}{n}}=z^{\frac{1}{n}}$

有無窮組 x、y、z 兩兩互素及不相等的正整數解。

這是本文要介紹的最後一個不定方程，從形式上看，那是很能嚇唬人的，不過，它的證明跟命題二和三一樣的簡單容易：

證明

設 a、b 爲任意兩個不相等且互素的正整數，命

(10) $x=a^{n},\quad y=b^{n},\quad z=(a+b)^{n}$

則 $x^{\frac{1}{n}}+y^{\frac{1}{n}}=(a^{n})^{\frac{1}{n}}+(b^{n})^{\frac{1}{n}}$

$$=(a+b)^{\frac{n}{n}}$$

$$= [(a+b)^n]^{\frac{1}{n}}$$
$$= z^{\frac{1}{n}}$$

命題五得證。

證明命題五的關鍵是 (10) 式中各數的關係。但那是如何構想出來的呢？其實，命題五很早就有人提出來，可是一直沒得到圓滿解決，因爲發覺要解決它並不容易。到了 1979 年，才由中國數學家戴宗鐸、馮緒寧和于坤瑞首先徹底地解決，他們所用的是頗高深的代數數論方法，而在證明過程中，他們指出 (9) 式有這樣的一類無窮組正整數解，而除了這一類，再沒有別的形式的正整數解。事實上，他們在論文中還同時證明了不定方程

(11) $\quad x^{\frac{m_1}{n_1}} + y^{\frac{m_2}{n_2}} = z^{\frac{m_3}{n_3}}$, $\quad (m_i , n_i) = 1$, $\quad m_i > 0$, $\quad n_i > 0$, $\quad (i = 1 , 2 , 3)$

有正整數解等價於不定方程

$$x^{d_1} + y^{d_2} = z^{d_3}$$

有正整數解，這裏 $d_1 = (m_1 , [m_2 , m_3])$，$d_2 = (m_2 , [m_1 , m_3])$，$d_3 = (m_3 , [m_1 , m_2])$。而 ( ) 表示最大公約數，[ ] 表示最小公倍數。

順帶一提，在 1981 年，數學家 M. Newman 證明了不定方程

$x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{n}} = z^{\frac{1}{r}}$，$m$、$n$、$r$ 都是正整數

的全部正整數解可由

$$x = t^{\frac{m}{d}} a^m , \quad y = t^{\frac{n}{d}} b^n , \quad z = t^{\frac{r}{d}} (a+b)^r$$

表出，其中 $(m , n , r) = d$，而 a、b、t 是任意正整數且 $(a , b) = 1$。

參考文獻

[1] 潘承洞、潘承彪。《初等數論》。北京大學出版社，92 年 9 月初版。

[2] 姚玉強。《費馬猜想》世界數學名題欣賞叢書之一。遼寧教育出版社，95 年 12 月再版。

[3] 徐肇玉。「費馬大定理的對偶形式與廣義費馬大定理」，《自然雜誌》。1988 年十一卷第七期，525 – 526 頁。

[4] 曹珍富。《丟番圖方程引論》。哈爾濱工業大學出版社，89 年 3 月初版。