有趣的投信問題及其解法

文耀光、潘建強
香港教育學院數學系

投信問題

如果將 8 封不同的信件隨機投入 4 個不相同的郵筒，而每個郵筒都至少要投入一封，究竟有多少種不同的投法呢？這個問題看似簡單，但一不小心，好容易會得出錯誤的答案。如果不相信的話，可隨便找幾個唸過高中的朋友試試看！（註：答案是 40824。）

本文嘗試給出兩個不同的解法，現分述如下：

解法一　先列舉各種不同的投信組合，並計算其排列數目，然後找出它們的總和。爲了方便說明，我們會以符號 (n_1, n_2, n_3, n_4) 來表示在不同的郵筒中分別投入了n_1、n_2、n_3和n_4封信的組合，且不妨假設$n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4$。由於郵筒內的信件排列方式有 $C^8_{n_1} \times C^{8-n_1}_{n_2} \times C^{8-n_1-n_2}_{n_3} \times C^{n_4}_{n_4}$ （$= \dfrac{8!}{n_1!n_2!n_3!n_4!}$）種，所以再乘以選擇郵筒的方式數，便可得出每種不同投信組合之總排列數目。以下是不同的投信組合之詳細計算步驟：

組合是 (1 , 1 , 1 , 5) 之排列數目：
$$C^8_1 \times C^7_1 \times C^6_1 \times C^5_5 \times \frac{4!}{3!}$$
$$= \frac{8!}{5!} \times 4 = 1344$$

組合是 (1 , 1 , 2 , 4) 之排列數目：
$$C^8_1 \times C^7_1 \times C^6_2 \times C^4_4 \times \frac{4!}{2!}$$
$$= \frac{8!}{2!\,4!} \times 12 = 10080$$

組合是 (1 , 1 , 3 , 3) 之排列數目：
$$C^8_1 \times C^7_1 \times C^6_3 \times C^3_3 \times \frac{4!}{2!\,2!}$$
$$= \frac{8!}{3!\,3!} \times 6 = 6720$$

組合是 (1 , 2 , 2 , 3) 之排列數目：
$$C^8_1 \times C^7_2 \times C^5_2 \times C^3_3 \times \frac{4!}{2!}$$

$$= \frac{8!}{2!\,2!\,3!} \times 12 = 20160$$

組合是 (2 , 2 , 2 , 2) 之排列數目： $C_2^8 \times C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2 \times \frac{4!}{4!}$

$$= \frac{8!}{2!\,2!\,2!\,2!} = 2520$$

$\therefore$ 不同的投信方式之數目 = 1344 + 10080 + 6720 + 20160 + 2520 = 40824。

解法二 此解法是採用遞歸式（recursive）的想法，先計算簡單的投信方式數目，然後遞歸計算較複雜的情況。爲了方便說明，我們會以符號 $(n\,,k)$ 表示投n封不同的信入k個郵筒，而每個郵筒都至少投入一封的投法數目，其中 $k \le n$。

當$k = 1$時，明顯有 $(n\,,1) = 1$。

當$k = 2$時，由於投每封信都有 2 個郵筒作選擇，但不容許所有信都投入同一個郵筒之中，所以得 $(n\,,2) = 2^n - 2 \times (n\,,1) = 2^n - 2$。

同理，當 $k = 3$ 時，由於投每封信都有 3 個郵筒作選擇，但不容許所有信都投入僅一個或兩個郵筒之中，所以得：

$$(n\,,3) = 3^n - 3 \times (n\,,2) - 3 \times (n\,,1) = 3^n - 3 \times 2^n + 3。$$

利用類似的分析，當 $k = 4$ 時，可得：

$$(n\,,4) = 4^n - 4 \times (n\,,3) - 6 \times (n\,,2) - 4 \times (n\,,1) = 4^n - 4 \times 3^n + 6 \times 2^n - 4。$$

代入 $n = 8$，可獲得本文討論的投信問題之解如下：

$$(8\,,4) = 4^8 - 4 \times 3^8 + 6 \times 2^8 - 4 = 40824。$$

聰明的讀者可能會注意到此解法跟二項展開式（binomial expansion）之係數有密切的關係(*)，而且很容易歸納出普遍情況 $(n\,,k)$ 的結果，即：

$$(n\,,k) = k^n - C_1^k (k-1)^n + C_2^k (k-2)^n - \ldots\ldots + (-1)^{k-1}\, C_{k-1}^k$$

證明從略，讀者不妨動手一試。

(*) 作者註： 坊間的教科書多以巴斯卡三角（Pascal Triangle）命名，即我國古代的楊輝三角。

結語

本文所介紹的兩種方法都各有特色，但以本質而論，第一種解法基本上是採用了窮舉的策略，必須考慮不同的投信組合才可以進一步算出答案。假使所涉及的組合之數目相當多，此種解法會變得相當繁瑣，所以不適合應用在很多信件和信箱的情況。相反，第二種解法是採用了遞歸的策略來找出答案，容易推廣至 (n, k) 的情況上去，因此對於有很多信件和信箱的情況仍然適合，而且較輕易地計算出正確答案。

如果讀者有興趣進一步去探討其他方法的話，不妨參考諸如「離散數學」或「組合數學」之類的大專用書，其中有關「生成函數」的章節，相信必定會獲益良多呢！

參考書目

1. 黃振杰（2000）。《離散數學》。廈門：廈門大學出版社。

2. Grimaldi, Ralph P. (1994). Discrete and combinatorial mathematics: An applied introduction (3rd edition). Addison-Wesley Press.