「可微」還是「可導」？

梁子傑
香港道教聯合會青松中學

在現時香港所有的附加數學教科書中，總會把 “differentiable” 一詞翻譯成「可微」，並稱 “differentiation” 為「微分法」。我相信這是由於教科書的作者都參考了課程發展議會在 1991 年編訂的《中學數學科常用英漢辭彙》和 2001 年編訂的《附加數學課程指引》（即參考書目 1 及 2）所致。

但如果我們翻開一些國內出版的書籍看看就會發現，國內作者對以上的名稱卻有另一種翻譯的方法。例如：復旦大學數學系主編的《數學分析》（參考書目 3），在上冊的第 162 頁中就清楚指出，當函數在某點存在著導數時，就稱該函數在那一點「可導」。

在第 178 頁中，作者引入了函數的改變量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$，並稱如果改變量可以分成兩部分 $\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x)$，其中 A 是 x 的函數，並與 Δx 無關，$o(\Delta x)$ 表示高階的無窮小（即當 Δx 趨向於 0 時，$o(\Delta x)$ 這個部分趨向 0 的速度比 Δx 的更快，因此當 $\Delta x \to 0$ 時，$\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to 0$），那麼就稱函數 $f(x)$ 為「可微」。（換句話說，函數的改變量 Δy 可近似地以 $A\ \Delta x$ 來代替。）在 179 頁中，更稱 $A\,\Delta x$ 這個部分為「微分」。

很明顯，依照《數學分析》的思路，「可微」和「可導」是兩個完全不同的概念。「可微函數」是指可以求得微分（即 differential）的函數，而「可導函數」則指可以求得導數（即 derivative）的函數。請大家留意：《數學分析》中的「可導」，才是香港課本中「可微」的意思。

我猜想，將 “differentiable” 譯成「可微」，可能是因為我們一向將研究有關問題的學問稱為「微積分」，而「微積分」就是由「微分」和「積分」兩個部分組成的，所以，很自然就會稱計算導數的工作為「微分」，而稱可以求得導數的函數為「可微」了。況且，在一元函數的情況下，凡可以求得導數的函數，必定可以求得它的微分，反之亦然。故此，將 “differentiable”

譯成「可微」或「可導」，也沒有分別。

事實上，對於可微函數 $f(x)$ 來說，$\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x)$，所以 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$。在等式兩邊取極限 $\Delta x \to 0$，由於 $\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to 0$，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的極限存在，並等於 A。由此可見，當函數是可微時，它必定可導。相反，當 $f(x)$ 爲可導時，$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，則推出 $\Delta y = f'(x)\,\Delta x + o(\Delta x)$，即 $f(x)$ 可微。同時，我們更可知道算式中的 A 其實就是 $f(x)$ 的導數 $f'(x)$ 了。

我同意，對於一元函數而言，「可微」和「可導」當然是同一回事；但對於多元函數來說，即使偏導數存在，該函數亦未必一定可微！例如：《數學分析》上冊第 252 頁中指出，二元函數 $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$（當 $x = y = 0$ 時，設 $f(0, 0) = 0$）的偏導數存在，但它在 $(0, 0)$ 點不可微。由此可見，「可微」和「可導」的確是有分別的，我們不應將兩者混淆。

在現時的書本中，一般都先介紹了「導數」的定義，跟著就稱計算導數的學問爲「微分法」，計算導數的方法爲「微分法則」，應用導數的部分爲「微分的應用」，到最後介紹微增量時（雖然新課程已刪去此部分），才引入「微分」的定義。大家不覺得這些名稱安排得十分混亂嗎？而且用語的先後次序亦很古怪，學生亦不容易掌握和分辨前面的「微分」和後面的「微分」到底有甚麼的分別。多多少少都造成一定的學習障礙。

故此，個人認爲，爲了掃除學生學習中不必要的障礙，爲了方便他們升讀大學後更容易掌握有關的知識，應該將「可微」和「可導」兩個譯法區分，並將其他相關用詞和用語的翻譯，作出相應的修改。

以下的附表，是本人參考了幾本國內出版的書籍（見參考書目 3 – 7），再加上一些個人意見而提出的。希望有關當局的官員和教科書的作者能夠考慮和接納我的建議，作出相應的修改。

英文字詞	現時的譯法	建議的譯法
Derivative	導數	導數（沿用舊名）
Differentiable	可微	可導
Differentiable function	可微函數	可導函數
Differentiation	微分法	求導法
Differentiate	微分	求……的導數
Differentiation formulas	微分法則	求導法則
Application of differentiation	微分的應用	導數的應用
Differential	微分	微分（沿用舊名）

歷史註記

據瞭解，「微分」和「積分」兩個名詞是由清代數學家李善蘭（1811 – 1882）於 1859 年翻譯羅密士（Elias Loomis, 1811 – 1899）的著作《代微積拾級》時提出的。當時的「微分」就是 “Differential Calculus”，亦即是「微分的計算」，而非「導數的計算」。事實上，在西方，「導數」的嚴格定義出現得比較遲。自牛頓等人於 17 世紀提出「微積分」後，到了 1821 年才由柯西（Augustin-Louis Cauchy, 1789 – 1857）提出導數的嚴格定義。祇不過，現時我們通常先教「導數」，再教「微分」，因此，就引起本文提出有關翻譯上的問題。亦可見現時課本中的用語，其實是翻譯上的一場誤會！

參考書目

1. 香港課程發展議會編訂（1991）。《中學數學科常用英漢辭彙》。香港教育署印行。
2. 香港課程發展議會編訂（2001）。《數學教育學習領域　附加數學課程指引（中四至中五）》。香港：政府印務局複印。
3. 復旦大學數學系主編（1967）。《數學分析　上冊》。香港：商務印書館香港分館。
4. 張奠宙主編（1996）。《中學教學全書　數學卷》。上海：上海教育出版社。
5. 譚鼐、翟連林編著（1985）。《數學縱橫談》。北京：科學出版社。
6. 何伍鳴、黃元正、朱志加（1988）。《近代數學知識叢書　微積分入門》。四川：四川教育出版社。
7. 山東工業大學高等數學教研室編（1993）。《高等數學　上冊》。山東：山東科學技術出版社。
8. 梁宗巨著（1995）。《數學歷史典故》。台灣：九章出版社（本書原本由沈陽：遼寧教育出版社於 1992 年出版）。
9. 北京大學數學系數學史翻譯組譯，克萊因著（1981）。《古今數學思想　第 4 冊》。上海：上海科學技術出版社。