香港數學教育佔了優勢還是劣勢？
由一道三角比習題談起

馮振業
香港教育學院數學系

中西有別

近年，我們看到越來越多的西方教育思潮登陸香港。教師們不斷進修，透過形形式式的課程，摘取不同的學位或文憑。當中有不少還是一些植根於西方思想的理論，站在中國文化背景上設計的課程並不多見。就數學教育而言，中、西方面對的問題實有頗大的差別。例如倫敦數學會曾對 55 名在英國大學修數學的學生作出測試，下面的兩個因式分解問題，均只有少於 80 % 的學生找到正確答案：

徹底因式分解下列算式：

(a) $2x^2 - x - 3$

(b) $x^2 - 9y^2$

更令人憂心的，是在 6 位兩題均不能完成的學生當中，竟然有 3 位在高級程度會考拿了個數學 B 級的呢！（London Mathematical Society, Institute of Mathematics and Its Application, & Royal Statistical Society; 1995, p. 31）

正當西方開始擔心學生的基本運算本領時，中國社會卻又有另一種困擾。下列一道題，在中國中、小學的不同班級進行測試，結果是除高中生以外，超過 80 % 的學生都算出答案！

「一條船上有 75 頭牛，32 頭羊，問船長幾歲？」（李、張、鄭，1997）

中國學生一般給人的印象是計算能力高，但頭腦或許不夠靈活機敏。相反地，西方的學生也許思想較爲活潑，但基本計算的純熟度卻或有不足。

香港站在中、西文化的夾縫中，到底是能取兩方之長，還是兼集兩方之短呢？最近的一次觀課經驗，促成筆者對這個問題的再思。

緣起觀課

在一次機會中，看到一位年輕教師教授中二的「三角比的關係」這課題。所見的是教師十分盡力把所有計算的步驟都解釋清楚，學生們都在依樣葫蘆，做其常規計算。下課後，筆者正在思量到底學生是否真的明白三角比的意義，於是隨手拿起課堂上討論過的一類習題：「知道銳角 θ 的某一三角比的值，求其他三角比的值」，擬就下列「反常規」問題，以測試學生對三角比概念的掌握（由這位年輕教師於稍後的教節以堂課形式執行）：

（甲） 已知下列三角形中，$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$，求：

(i) AC

(ii) $\tan\theta$

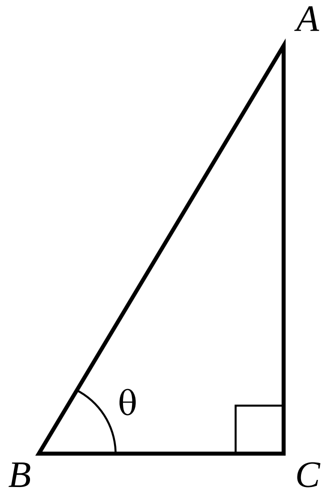


圖　一

如果把問題改成下面形式，

（乙） 已知 θ 為銳角，而且 $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$，求 $\tan\theta$。

問題就返回常規類形。一般的方法，就是要畫一個其中一邊與斜邊的比爲 1：2 的直角三角形，並鎖定此兩邊的夾角就是 θ（見下圖）。

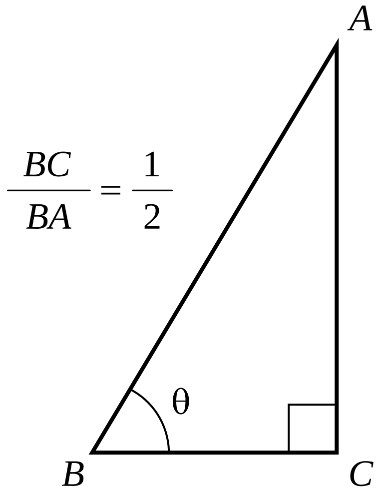


圖　二

由於符合上述條件的直角三角形有無窮多，而且我們更可指定 BC 的長度（沒有足夠的幾何作圖經驗，這點可不容易掌握），最方便的做法，就是要求 BC 的長度爲 1 單位。那麼，$\cos\theta = \frac{1}{2}$ 便保證了 BA 的長度爲 2 單位。接著以勾股定理求 AC，最後便可得出 $\tan\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ 。

上面的做法，抓緊了在（乙）中可隨意選擇包含 θ 的直角三角形這一點，而（甲）卻淡化了這種自由！

如果把（甲）換成（丙），

（丙） 已知下列三角形中，$\cos\theta = \frac{1}{2}$ ，求 $\tan\theta$。

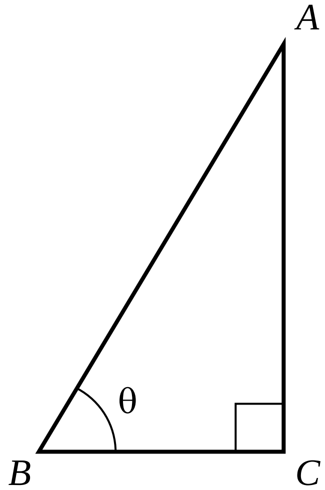


圖　三

正確的做法應是：

設 BC 長 x 單位（$x > 0$），由 $\dfrac{BC}{BA} = \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ 得 BA 長 $2x$ 單位。

再以勾股定理求得 $AC = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3}x$ 單位。

最後，$\tan\theta = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\sqrt{3}x}{x} = \sqrt{3}$。（因 $x > 0$。）

（當中也可以 BC 表 BA 及 AC，結果相同。）

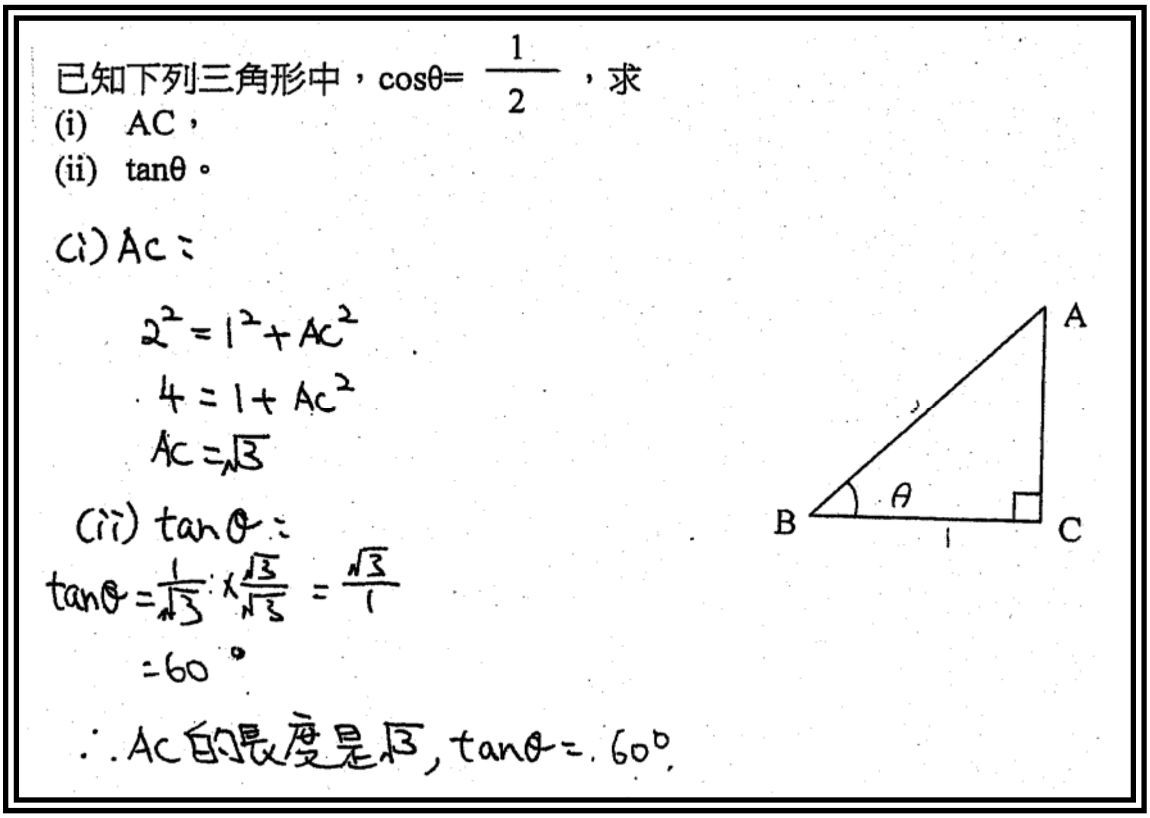
能完全明白上述道理的學生，自然會為（甲）(i) 寫下「不可能找到」和用（丙）的解法回答（甲）(ii)。

非常測試

接受（甲）測試的 39 名中二女生，來自一所歷史悠久的中學，大部分是乖乖聽老師授課的一類。測試以堂課形式進行，學生不許看任何書籍或筆記資料，以下是答題結果的整理：

(甲)(i) 部分表現說明	頻數	百分比
題解無法理解的	2	5.1 %
只抄題或抄公式的	12	38.8 %
認為可隨意設定邊長但沒有完成計算的	1	2.6 %
誤以為 $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ 中的 1 或 2 是真實邊長但沒有作進一步計算的	6	15.4 %
誤以為 $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ 中的 1 或 2 是真實邊長並試圖計算 AC 但沒有成功的	3	7.7 %
誤以為 $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ 中的 1 或 2 是真實邊長並成功算得 $AC = \sqrt{3}$ 的	14	35.9 %
認為由 $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{1}{2}$ 可推論 $AC = 1$ 的	1	2.6 %

從以上的數據可以看出，認爲可以由 $\cos\ \theta = \dfrac{1}{2}$ 斷定三角形邊長的有 23 人（圖四是一個典型例子），合共佔全體的 59 %，是一個相當大的比例。另一方面，也發現沒有一人指出「無法找到 *AC* 的長度」。當然，有這種想法的人也許已被歸入只抄題或抄公式的一類。


已知下列三角形中，$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$，求

(i) AC，

(ii) $\tan\theta$。

(i) Ac：

$2^2 = 1^2 + Ac^2$

$4 = 1 + Ac^2$

$Ac = \sqrt{3}$

(ii) $\tan\theta$：

$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{1}$

$= 60°$

∴ Ac 的長度是 $\sqrt{3}$，$\tan\theta = 60°$

圖　四

這個實驗的結果可以暫時這樣表達：

「大部分學生都誤以為單由邊長比便可得出實際邊長。」

不論是否同意這個總結的方法，一點可以肯定：學生其實對三角比的意義不甚了了。

課本玄機

要瞭解這種現象的成因，主要應從教師教學和課本的表述方法入手。由於未曾緊跟全部有關三角比課題的課堂教學，只好翻一翻課本，看看有何啓示。

所用的課本，有「三角比的關係」一章，其中首頁便有如下的解說（梁、黎，1998，2B 冊，163 頁）：

只要我們知道銳角 θ 的任何一個三角比的值，就算不使用計算機也可以求得 θ 其餘的三角比的值。

以下的例子，考慮已知 $\sin\theta$ 的值的情況。

例如： 已知 $\sin\theta = \frac{2}{3}$，不得使用計算機，求 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$ 的值。

[為求所需的三角比，我們可以畫一個直角三角形 ABC，其中 $\angle BCA = 90°$，$\angle ABC = \theta$。]

在圖中，因為 $\sin\theta = \frac{2}{3}$，所以我們可設 CA = 2，AB = 3（因此 $\sin\theta = \frac{CA}{AB} = \frac{2}{3}$）。

利用畢氏定理，

$$BC = \sqrt{AB^2 - CA^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

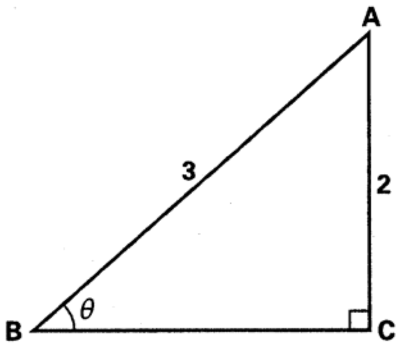


圖 1

因此 $\cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 和 $\tan\theta = \frac{CA}{BC} = \frac{2}{\sqrt{5}}$。

同樣，如果已知 $\tan\theta$ 的值，亦可求得 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的值；或如果已知 $\cos\theta$ 的值，亦可求得 $\sin\theta$ 和 $\tan\theta$ 的值。所以，一個角的所有三角比都是相關的。

圖　五

當中最惹人關注的一句是：

「在圖中，因為 $\sin\theta = \frac{2}{3}$，所以我們可設 $CA = 2$，$AB = 3$（因此 $\sin\theta = \frac{CA}{AB} = \frac{2}{3}$）。」

明顯地，粗心的學生會很易被錯誤引導致相信 $\sin\ \theta = \dfrac{2}{3}$ 表示 θ 的對邊長 2，斜邊長 3。括號內的補充，就更令人對推論的邏輯關係模糊起來了！

接下去的例題，也出現相近的指導解說（梁、黎，1998，2B 冊，164 頁）：

> **已知 $\tan\theta = 3$，不得使用計算機，求 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的值。**
>
> (答案以平方根號「$\sqrt{\ }$」表示。)
>
> **[由於 $\tan\theta = 3 = \frac{3}{1}$，我們可以畫一個直角三角形 ABC，其中 $\angle BCA = 90°$，$\angle ABC = \theta$。然後，設 CA 為 3，BC 為 1。]**

圖　六

如果進一步探視課本中對三角比意義的介紹，便發現其中是透過單位圓引入的（梁、黎，1998，2A 冊，195 頁）。這種手法，在概念上，雖可避開交代三角比的定義獨立於三角形的大小，但卻冒著令學生摸不著頭腦的風險，或許會得不償失。

有關初中三角比課題的教學策畫，多年前筆者的一位學生曾經寫了一篇很好的分析文章（湯，1992），當中揭示了三角比課題的引入如何可以清楚地與全等三角形及勾股定理等課題連繫，使教學發展變得自然流暢，一切功夫都來得順理成章。值得補充的，是在近年幾何作圖訓練日漸式微的情況下，學生對怎樣的條件才可固定三角形不甚了了，於是也不曉得分辨甚麼情況下邊長是確定可以求得的。

令人喪氣的，是近年一次觀課，正好走進這位舊生的課堂，也正好看著三角比的教學，卻發現她沒有實施她認爲最好的手法。言談之間，得知並非她已找到她的設計的不足之處，故而揚棄，而是校內有各方面的制肘，

使得好方法也無從落實，令人唏嘘不已。

結語

上面報告的小實驗結果，不可能輕易推廣。然而，卻使人擔心夾在中、西文化之間的香港，可能不幸地承襲了中、西兩方的短處。假如香港學生擁有像中國大陸學生的計算本領，那麼，縱然誤墮了「圈套」，也該有高比例的學生算得 AC 爲 $\sqrt{3}$，35.9 % 可算是個很低的水平了。若說頭腦靈活，則竟然沒有一個提出「不可能找到」，也算是丟臉極了。

筆者相信，像這裏揭示的教學問題，也許多不勝數。可惜香港少有進行深入的教學研究的文化，置身鋪天蓋地的教育改革和課程改革之中，卻也看不出眾多的教學難題的出路。關心教學問題的人，恐怕還是要接受孤軍作戰的現實了。

參考資料

李秉彝、張奠宙、鄭正亞（1997）。考試文化與數學教學。《數學教育》，4，96 – 102 頁。

梁貫成、黎文傑（1998）。《今日數學》，2A、B 冊。

湯敏玲（1992）。對數學策劃之我見。*DATUM*，32，9 – 15 頁。

London Mathematical Society, Institute of Mathematics and Its Application, & Royal Statistical Society. (1995). *Tackling the mathematics problem*. London: Author.