「馮諾依曼的蜜蜂」的推廣

陳聖元
台北市龍山國民中學一年級

拜讀《數學教育》第 13 期蕭文強教授大作「馮諾依曼的蜜蜂」後，我提出如果蜜蜂去程〈順風〉、回程〈逆風〉時飛行速度不同，則此問題應如何解？有沒有快捷巧妙的解法？

「馮諾依曼的蜜蜂」的原問題爲：

甲和乙相隔 20 哩，各自乘自行車迎面而行，時速都是 10 哩。有一隻蜜蜂從甲飛到乙，碰到乙便轉頭飛向甲，碰到甲便轉頭飛向乙，如此這般來回穿梭，直至甲和乙在中間碰頭。如果蜜蜂的飛行時速 15 哩，問蜜蜂共飛了多少哩？

根據馮諾依曼自稱他的解法「只是計算蜜蜂來來回回每次飛多遠，把它加起來，求一個無窮級數的和而已」，我揣摩出他的解法：

蜜蜂第一趟飛了 $\dfrac{20}{15+10} = 0.8$ 小時，即飛了 15×0.8 哩 $= 12$ 哩

蜜蜂第二趟飛了 $\dfrac{20(1-0.8)}{15+10}$ 小時，即飛了 15×0.16 哩 $= 2.4$ 哩

蜜蜂第三趟飛了 $\dfrac{20(1-0.8)(1-0.8)}{15+10}$ 小時，即飛了 15×0.032 哩 $= 0.48$ 哩

$$\vdots$$

蜜蜂第 n 趟飛了 $\dfrac{20(1-0.8)^{n-1}}{15+10} = \dfrac{0.8}{5^{n-1}}$ 小時，即飛了 $15 \times \dfrac{0.8}{5^{n-1}}$ 哩 $= \dfrac{12}{5^{n-1}}$ 哩

$$\vdots$$

利用無窮等比級數求和公式 $\dfrac{a}{1-r}=S$（其中 a 爲首項，r 爲公比），得出小蜜蜂共飛了：

$$12+2.4+0.48+\cdots+\frac{12}{5^{n-1}}+\cdots=\frac{12}{1-\frac{1}{5}}=15 \text{ 哩}$$

這個按部就班的解法雖然不似快捷解法的機靈簡潔，但是對於我提出推廣的問題，我們似乎不容易找到快捷解法，而這個硬幹的做法正可展現其優勢了。

假設原題改爲蜜蜂去程〈順風〉時速 18 哩，回程〈逆風〉時速 12 哩，其解法爲：

蜜蜂第一趟飛了 $\dfrac{20}{18+10}=\dfrac{5}{7}$ 小時，即飛了 $18\times\dfrac{5}{7}$ 哩

蜜蜂第二趟飛了 $\dfrac{20(1-\frac{5}{7})}{12+10}=\dfrac{10}{11}\times\dfrac{2}{7}$ 小時，即飛了 $12\times\dfrac{10}{11}\times\dfrac{2}{7}$ 哩

蜜 蜂 第 三 趟 飛 了 $\dfrac{20(1-\frac{5}{7})(1-\frac{10}{11})}{18+10}=\dfrac{1}{11}\times\dfrac{2}{7}\times\dfrac{5}{7}$ 小 時 ， 即 飛 了 $18\times\dfrac{1}{1}\times\dfrac{2}{7}\times\dfrac{5}{7}$ 哩

蜜蜂第四趟飛了 $\dfrac{20(1-\frac{5}{7})(1-\frac{10}{11})(1-\frac{5}{7})}{12+10}=\dfrac{10}{11}\times\dfrac{1}{11}\times\left(\dfrac{2}{7}\right)^2$ 小時，即飛了 $12\times\dfrac{10}{11}\left(\dfrac{2}{7}\right)^2\times\dfrac{1}{11}$ 哩

$$\vdots$$

蜜蜂第 $2n+1$ 趟飛了 $\dfrac{20(1-\frac{5}{7})^n(1-\frac{10}{11})^n}{18+10}=\left(\dfrac{1}{11}\right)^n\times\left(\dfrac{5}{7}\right)^n\times\dfrac{2}{7}$ 小時，即飛了 $18\times\left(\dfrac{1}{11}\right)^n\times\left(\dfrac{2}{7}\right)^n\times\dfrac{5}{7}$ 哩

蜜蜂第 $2n+2$ 趟飛了 $\dfrac{20(1-\frac{5}{7})^{n+1}(1-\frac{10}{11})^{n}}{12+10}=\dfrac{10}{11}\times\left(\dfrac{2}{7}\right)^{n+1}\times\left(\dfrac{1}{11}\right)^{n}$ 小時，即飛了 $12\times\dfrac{10}{11}\times\left(\dfrac{2}{7}\right)^{n+1}\times\left(\dfrac{1}{11}\right)^{n}$ 哩

$$\vdots$$

我們發現到小蜜蜂第奇數趟飛行距離成爲公比 $\dfrac{2}{77}$ 的無窮等比級數；小蜜蜂第偶數趟飛行距離亦成爲公比 $\dfrac{2}{77}$ 的無窮等比級數。

小蜜蜂的總飛行距離即把奇數趟的飛行距離與偶數趟飛行距離此二等比級數相加：

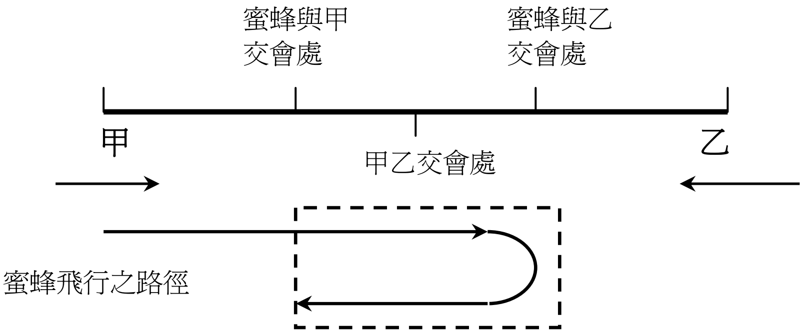
$$\frac{18\times\frac{5}{7}}{1-\frac{2}{77}}+\frac{12\times\frac{10}{11}\times\frac{2}{7}}{1-\frac{2}{77}}=18\times\frac{5}{7}\times\frac{77}{75}+12\times\frac{10}{11}\times\frac{2}{7}\times\frac{77}{75}=\frac{82}{5}\ \text{哩}$$

這個解法顯然比原題要複雜的多，如果甲、乙二人騎自行車的速度又不相同，此種解法可能又稍加麻煩些了。有沒有快捷巧妙的解法呢？

我們注意到蜜蜂總共飛了 $\dfrac{20}{10+10}$ 小時，但是這 1 小時飛行中，有些時候是以時速 18 哩飛行，有些時候是以時速 12 哩飛行；如果知道小蜜蜂有多少時間以時速 18 哩飛行？有多少時間以時速 12 哩飛行？則問題即可迎刃而解。

若規定小蜜蜂由甲飛行到乙方向的距離爲正，由乙飛行到甲方向的距離爲負，且假設小蜜蜂以時速 18 哩飛行了 t_1 小時，以時速 12 哩飛行了 t_2 小時，我們不難發現 $t_1+t_2=1$。且小蜜蜂一來一回，按我們的規定。其飛行距離爲一正一負，正負相抵，其飛行距離等於甲所行進的距離。蜜蜂最後停在甲乙交會處，也就是等於甲所行進之距離：

$$18\,t_1-12\,t_2=10$$



很容易由解二元一次方程，得出 $t_1=\dfrac{11}{15}$ ，$t_2=\dfrac{4}{15}$ ，因此小蜜蜂共飛了 $18\times\dfrac{11}{15}+12\times\dfrac{4}{15}=\dfrac{82}{5}$ 哩。

掌握了一些不變量〈順向減去逆向飛行距離等於甲所行進的距離〉，我找出了「馮諾依曼的蜜蜂」推廣問題的快捷解法。

對於更一般化的情況：

甲和乙地相隔 S 哩，各自以時速 $V_{甲}$ 哩和 $V_{乙}$ 哩乘自行車迎面而行。有一隻小蜜蜂從甲飛到乙，碰到乙便轉頭飛向甲，碰到甲便轉頭飛向乙，如此這般來回穿梭，直至甲和乙在中間碰頭。如果蜜蜂從甲飛到乙的時速爲 $V_{順}$ 哩，從乙飛到甲的時速爲 $V_{逆}$ 哩，問蜜蜂共飛了多少哩？

（原題是 $V_{甲}=V_{乙}=10$，$V_{順}=V_{逆}=15$，$S=20$ 之特例。）

假設蜜蜂順風飛了 t_1 小時，逆風飛了 t_2 小時，則可得下列方程：

$$\begin{cases} t_1+t_2=\dfrac{S}{V_{甲}+V_{乙}} & \text{.. (1)} \\ V_{順}\,t_1-V_{逆}\,t_2=V_{甲}\times\dfrac{S}{V_{甲}+V_{乙}} & \text{.................................. (2)} \end{cases}$$

由 $(1)\times V_{逆}$ 得到 $(V_{順}+V_{逆})\,t_1=\dfrac{(V_{逆}+V_{甲})S}{V_{甲}+V_{乙}}$

解出 $t_1=\dfrac{(V_{逆}+V_{甲})S}{(V_{甲}+V_{乙})(V_{順}+V_{逆})}$ ，$t_2=\dfrac{(V_{順}-V_{甲})S}{(V_{甲}+V_{乙})(V_{順}+V_{逆})}$ 。

所以小蜜蜂飛行之總距離爲：

$$\frac{V_{\text{順}}(V_{\text{逆}}+V_{\text{甲}})S}{(V_{\text{甲}}+V_{\text{乙}})(V_{\text{順}}+V_{\text{逆}})}+\frac{V_{\text{逆}}(V_{\text{順}}-V_{\text{甲}})S}{(V_{\text{甲}}+V_{\text{乙}})(V_{\text{順}}+V_{\text{逆}})}$$

蕭教授文中指出：兩種做法皆有可取之處。快捷解法機靈簡潔，按部就班甚至硬幹的做法也顯示了耐心、決心、踏實這些可貴的品質。作爲一個熱愛數學的學子，我們不應滿足於問題的某一種解法，應如蕭教授訓示的「理應兼收並蓄，不可有所偏廢」。

本文承蒙加拿大亞伯達大學數學系劉江楓教授、台灣九章出版社孫文先老師悉心指導，謹此致謝！

蕭文強教授對本文的回應

寫了文章能激發別人繼續探索，是作者最大的收穫！接到文先兄[#]轉來台北龍山國中一年級生陳聖元的文稿，把「馮諾依曼的蜜蜂」提及的問題推廣，使我欣喜莫名。陳同學如此用心學習又富進取的研究精神，十分可賀！

不妨再補添一筆，即是說明甲、乙二人騎自行車速度不相同的情況。其實，$V_{\text{甲}}$和 $V_{\text{乙}}$ 相同抑或不相同祇屬次要。反之，陳同學提出的 $V_{\text{順}}$ 和 $V_{\text{逆}}$ 不相同才是增添問題興味的主要因素，看看最後得到的公式便知端倪。該公式可化簡爲

$$\frac{[V_{\text{甲}}(V_{\text{順}}-V_{\text{逆}})+2\,V_{\text{順}}\,V_{\text{逆}}]\,S}{(V_{\text{甲}}+V_{\text{乙}})(V_{\text{順}}+V_{\text{逆}})}$$

由此見到 $(V_{\text{順}}-V_{\text{逆}})$ 這個差項的影響。譬如說，當風平浪靜的時候，$V_{\text{順}}$ 和 $V_{\text{逆}}$ 相同（都記作 V），公式化爲原來的 $\dfrac{VS}{V_{\text{甲}}+V_{\text{乙}}}$ 。

編者按：即九章出版社孫文先先生