是格式問題嗎？由兩個例子說起

馮振業
香港教育學院數學系

學數學最重要是學思考，而要思考，也總因爲當中有原理。最令人沮喪的，莫過於把原理的探討，矮化成格式的設定。很多教師都把下面兩道算式評爲錯誤，並且把它們歸入「格式錯誤」的類別：

（甲）

$$\begin{array}{r|l} & \underline{\;1\;4\;} \\ 5\;) & \;7\;0 \\ & \underline{\;7\;0\;} \end{array}$$

（乙）

$$\begin{array}{lr} & 1\;2\;3 \\ \times & 6 \\ \hline & 6\;0\;0 \\ & 1\;2\;0 \\ + & 1\;8 \\ \hline & 7\;3\;8 \\ \hline\hline \end{array}$$

然而，如果我們不深究算式的實質意義，對錯就無從判定（馮，1999b）。要評定（甲）式的對錯，必先深入瞭解長除直式的確切意義。關於此點，可參看《數學化教學：難點選編》（馮，1999a）及《數學化教學：除法》（馮、王、葉、何，2000），此處不贅。值得一提的，是乘數表的大小與長除直式的計算步驟的關係。

乘數表其實是若干題乘數的積的表列，而背誦乘數表，也就是牢記若干題乘數的答案。最常見的乘數表是一個 10×10 矩陣（表一）：

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

表　一

這樣的一個乘數表，雖然只收錄全部 100 題一位數乘以一位數的結果，但只要能配以十進位值記數系統和乘法分配性質的理解，就容許我們透過把任意整數相乘化成幾步的一位數相乘，掌握無窮多題整數相乘的機械化計算方法。

這種化「無窮」爲「有限」的工作方式，是重要的數學思想。接下來要問的，是這個「有限」到底應該是多少。我們可以問，爲甚麼是這樣大小的乘數表？也就是說，爲甚麼要記 100 題，而不是 10 題或 10000 題？

相信不必細想，便知道只記 10 題是無法完成慣用的乘法機械化操作的，此處從略。更有趣的，是記了 10000 題，世界會變成甚麼樣子！

先看一個例子：

$$\begin{array}{rr} & 4 \\ \times & 5 \\ \hline & 20 \end{array}$$

上面的直式，基本上是沒有運算的實質作用的，因爲 20 是由表一而來，計算者根本從沒用上直式作爲輔助計算的工具。

相反，再看另一個例子：

$$\begin{array}{rcc} & 1 & 4 \\ \times & {}_{\shortparallel} & 5 \\ \hline & 7 & 0 \end{array}$$

這裏直式幫助了把 14 × 5 化成 4 × 5 和 1 × 5 + 2 這一連串隨乘隨加的機械化步驟。大家可以看到，線上的兩小點便是運算中段的過渡性產物。總而言之，由於 14 超出了表一涵蓋的範圍，計算便不可能像 4 × 5 般「一步到尾」。可是，如果計算者背誦了下面的乘數表，情況就大不相同了。

×	0	1	2	… …	99
0	0	0	0		0
1	0	1	2		9
2	0	2	4		18
⋮ ⋮					⋮ ⋮
99	0	99	198	… …	9801

表 二

這個 100 × 100 的表內藏了整整 10000 題乘數的結果，若然記下，下面的乘數也自然可以「一步到尾」！

$$\begin{array}{rr} & 14 \\ \times & 5 \\ \hline & 70 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} & 76 \\ \times & 48 \\ \hline & 3648 \end{array}$$

明眼的讀者應已猜到，熟誦表二的人自然不會這樣計算（甲）的：

$$\begin{array}{r} 14 \\ 5\,\overline{)\;70} \\ 5 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline \end{array}$$

這裏的演算，實建基於只對表一的掌握。也就是說，計算者因未能由表一直接找到一個兩位數 x，滿足

$$5x \leq 70 < 5(x+1)，$$

所以退而先求一個一位數 y（即這裏的 1），滿足

$$5y \leq 7 < 5(y+1)。$$

一減之下，剩下的 2（代表 20）再加上下一個位（這兒是 0），便成計

算中段的一個部份餘（即 20）。由於十進位值系統的特質，我們一定可以找到一個一位數 z，滿足

$$5z \leq 20 < 5(z + 1)。$$

這樣便成就了一系列的一至二位數除以一位數的連環計算，而表一便成了整個過程的必備數據，讓計算者在腦海中翻查。

話說回來，記誦表二的人自然不必如此張羅，直接由表中讀出 14，便可以了。如此，

$$\begin{array}{r|l} & \;\;14 \\ \cline{2-2} 5\,) & \;\;70 \\ & \;\;70 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

便成了最合理的寫法了。誠然，很少有人熟誦表二的。如果學生以這個爲理由，拒絕分步列出計算，確實有取巧懶惰之嫌。不過，隨著計算經驗增加，人總會不自覺地把心中所記的表一擴大了一點，包括了一些諸如 $12 \times 11 = 132$，$12 \times 12 = 144$，$15 \times 15 = 225$，之類的結果。換言之，心中記下的題數是會超過 100 的。碰上剛巧記得 $14 \times 5 = 70$ 的人，再進行分步計算便顯得多此一舉了。

教師必須留意，令學生背誦表一，目的就是爲了加速計算。如果學生記的比教師要求的還多，就算不獲嘉許，總不成受到責罰吧！

上面的討論，只從學理出發，並未考慮教學的過程。如果學生是因爲不明白長除直式的原理，導致無法表達其中的分步計算，那便不是乘數表擴大的結果，教師便應對症下藥，把長除直式解釋清楚，不然，只會把學生推進不同的冤獄！

相對於（甲），（乙）的情況卻比較簡單。利用乘法分配性質，我們得知

$$\begin{aligned} 123 \times 6 &= (100 + 20 + 3) \times 6 \\ &= 100 \times 6 + 20 \times 6 + 3 \times 6 \\ &= 600 + 120 + 18 \\ &= 738 \end{aligned}$$

而（乙）式就是上面橫式的直式對應。因爲我們不能說上面橫式的數學表達有任何錯誤，所以我們也同樣不能說它所對應的直式有任何錯誤。如果直式是用來協助進行正確計算的話，（乙）所顯示的運算過程，確實又得到直式使位值容易對齊的方便，絕非矯揉造作，多此一舉。

一般教師不滿的，是學生未能把（乙）寫成：

$$\begin{array}{rccc} & 1 & 2 & 3 \\ \times & & {}_{1} & {}_{1}6 \\ \hline & 7 & 3 & 8 \end{array} \quad \text{............................}（\#）$$

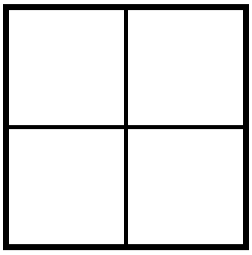
這樣的隨乘隨加運算，委實是（乙）的「加速」版。然而，其中的原理是一樣的。所不同者，是後者依賴較純熟的心算罷了。

很多教師或許更關心（乙）式的計算應否被扣分，如果要扣分，又應當扣多少。這些問題的答案，往往受我們的數學教育哲學觀主宰。如果教數學的目的是要讓學生在短時間內掌握最精煉的運算技巧，那麼（乙）的表現明顯較（#）稍遜一籌，與其說扣分，不如說未能全拿所有分數。至於不足滿分多少，也沒有金律可依。個人相信，既然（乙）沒有錯，最少也應拿下一半分吧。事實上，書寫較長的直式本身已是一種處罰，有否必要進一步加重，確屬見仁見智。反過來，如果我們只要求學生掌握乘法演算的原理，又能包容學生不同的學習進展速度，那麼，爲（乙）和（#）打上相同的滿分也絕不爲過。由（乙）走向（#）的一段成熟之路，我們大可留給學生自己摸索。在原理已充分掌握的前提下，臻於精煉只是時間問題，不必太過費心。

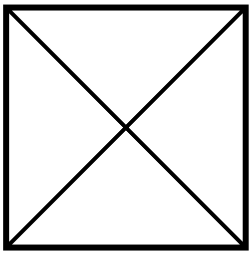
總結（甲）和（乙）兩個例子，不難發現一個有趣的潛藏危機：學生走得太快或太慢，儘管沒有走錯，也會受罰！如果我們不打算繼續容忍這種怪現象，就必須正視上述的問題，否則，照顧學習差異便無從談起；而學習也只會淪爲揣摩教師意志的行爲，可悲！可悲！

最近一位朋友給我說了一則他女兒的小故事，發人深省。話說家課要學生在正方形上加上兩條直線（段），使圖形分割成四個完全相同的圖形。教師結果接受了（丙）和（丁），卻不肯接受朋友女兒的（戊）！

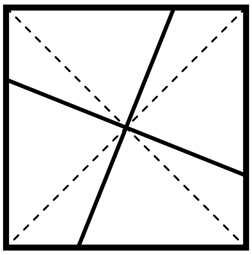
（丙）



（丁）



（戊）



稍轉一轉腦袋便知，（戊）中的兩條通過正方形中心，且互相垂直的線，揭示了無窮多個解（自然也包括了（丙）和（丁）），是出類拔萃的答案，理應額外褒獎。但事實卻落得被罰改正（成（丙）或（丁））的悽慘下場，能不叫人痛心乎？

<u>參考資料</u>

馮振業（1999a）。《數學化教學：難點選編》。香港：作者。

馮振業（1999b）。數學化教學：由夢想到現實。載於黃毅英、黃家鳴（編）。《基礎數學教育的優化研討會論文集》，4 – 46 頁。香港：香港中文大學教育學院課程與教學學系。

馮振業、王倩婷、葉嘉慧、何妙珍（2000）。《數學化教學：除法》。香港：作者。