

## 另類數學活動的評鑑

陳夢熊

港澳信義會慕德中學

### 在迷惘中

近年來，有關「教育改革」、「課程改革」、「資訊科技教學」、「終身學習」、「共通能力」等等的教育政策令人應接不暇，在資源有限下，我們應該怎樣落實這些政策呢？另一方面，筆者亦關注不少學生對數學學習有負面的看法：「學習數學有何益處？」、「學習數學就是等同做練習！」、「學習數學爲了應付考試升學！」、「可以在生活中應用數學嗎？」、「雖然數學成績不錯，但我不喜歡數學！」。

筆者嘗試從「數學教育的目標是甚麼呢？」作爲起點，引發同工討論。

### 一起尋覓

筆者在 1999 年期間與本校部分數學科同工搜集和整理一些國家對數學教育的看法和期望，並與其他同工分享。我們的信念就是通過數學教育，除在數學知識方面使學生具備良好的基礎和成爲學習其他知識的工具之外，在技能方面使學生能樂於用數學語言與人溝通、善於從數學角度去解決問題、敢於猜測、懂得推理；在態度方面也能欣賞數學和肯定數學的價值、建立自信。我們的教學理念是學習的本義在於學生能自我建構知識，老師的重要角色是製造一個合適的學習環境，促進學習。教學上朝向啓發式的教學，鼓勵小組研習，培養學生有解決問題的能力，積極推行多元化評核作教與學的回饋。

在「學會學習」的精神下，我們既重視學習成果也重視學習經歷，亦即「學甚麼？」和「怎樣學？」，可是，九大共通能力中的問題解決能力或解決問題能力應該如何教授呢？

問題的定義是「一個問題帶出懷疑、迷惑或困難的狀況；同時提供可作考慮、討論或解決辦法的機會」(Webster's II: New Riverside University Dictionary, p.937)，亦即是說，問題能產生學習動力。在解決問題時，沒有方法是不可行的，在困難中尋找解決的方法，在重重障礙中找出路，以取得一個圓滿的結局。

## 結伴同行

學期初，筆者鼓勵同工教授教育心理學家 G. Polya (1957) 在《How to solve it》一書中提出在解決問題時的四個基本原則：理解問題、訂下計劃、執行計劃及作回顧，作為學習基礎。培養學生在解決數學問題的過程中，學習運用不同策略去解決問題，包括猜測、尋找規律、預計、猜想、測試、假設、推論和驗證。另一方面，亦鼓勵教師多作反思，體會在課堂中進行問題解決活動時的角色跟傳統的角色有何不同，教師成為了促進者、給予能力者、啟發者、聆聽者、發問者、評估者和觀察者。

在學年中，通過不同類型的教學活動，包括課堂小組協作活動、在家課中加入開放題和個人或小組協作專題報告（見附件一），深化這類型的學習，但次數、形式、深度和闊度不拘，同工可按自己的領悟和教學風格自我完善，鼓勵同工多交流和互相觀課。

## 邊學邊做

既然我們已訂定新的校本數學教育目標，將問題解決活動放在重要位置，那麼我們應怎樣進行有效評鑑，作為檢視學與教的基礎呢？我們在 1999 年度開始在中一及中二級的考試中，安排小組協作問題解決評估，數學組同工連同實習教師一起參與設計另類評鑑活動，包括擬題、討論、評鑑準則、考核形式、教師態度與檢討等工作。

## 邊做邊學

評核當日，四個考試中心各由兩位教師負責主考，同學以小組（3 至 4 人）形式進行考試，進入試場時，同學隨機選擇一條題目（見附件二示例），先有十五分鐘時間討論，然後再有十五分鐘以面試形式進行，其間小組同學盡量用說話表達如何構思問題、運用何種策略或技巧，可行的解是甚麼，教師通過提問，觀察同學在理解問題、策略的使用、準確性、態度、溝通等方面的表現，作出評分，各項評分的範圍由 0 分至 5 分不等，但經過兩年實踐後，我們建議新學年各項評分的範圍改為 0 分至 3 分，並列出各項細則（見附件三）。整級評估活動由早上 8:45 開始至下午 4:00 完結，考試完畢，同工身心皆疲倦。

## 分享經驗

但最令人感動和鼓舞的，就是在試後的一個早會上，有一位兼教數學

的同工，與全校師生分享他在上述評估活動過程中獲得那份喜悅和滿足，他欣賞學生積極投入，有些學生解決問題的方法超越我們預設，他也發現很多他以爲學生學懂了的知識和技能，原來基礎並不扎實的。他覺得從這類評估活動中，學生的表現成了自己的鏡子，對自己日後的教學也有裨益。

### 文化轉變

在學校裡推行問題解決學習時需要克服的最大困難不是「出問題」，而是改變人們對數學學習的文化與期望，包括學生、家長、教師、學校及社會。經過兩年多的實踐，或許期間有很多困難，眾所周知是同工的空間不足及工作量大(教學與非教學)，然而，我們科內的共識就是只要路線正確、各人步伐可以不同，毋須統一步伐，在前者應關顧在後者，彼此扶持，多些鼓勵分享成功經驗，失敗也無妨，這也是一種寶貴的經驗。

### 附件一：推行問題解決學習的示例

#### 一、課堂小組協作活動

##### 問題 (1999 – 2001 中二級)：

陳老伯住在一座三層高的村屋，距屋旁 1.5 米處有一條電燈柱，在昨天的風暴中被強風吹倒，剛好傾斜壓著他所住的村屋外牆。他在天台上仍可看見燈柱的頂部，一邊的燈罩爛了，另一邊則搖搖欲墜，驚險萬分。當正午時分，在天台地上量得燈柱的影長是 0.5 米。他現在正向保險公司索償，但他填寫意外保險索償表格時有以下困難，你可以幫他解決嗎？

- (a) 繪畫一略圖描述上述情況，圖中各部份要標記名稱和尺寸。
- (b) 問最少還要知道些甚麼資料才可計算出燈柱的長度呢？應怎樣計算呢？
- (c) 你可先估計所需資料的數值，然後進行計算燈柱的長度。

##### 回饋：

- ◇ 有部分學生未能掌握題意或理解錯誤，故無法完成任務。
- ◇ 能繪畫一略圖描述上述情況的同學，大都能指出需要知道村屋的高度或電燈柱的傾斜角度；同學能運用的問題解決方法也很多，計有畢氏定理、比例、相似三角形、三角比等等。
- ◇ 同學在估算部分的表現非常有趣，有八成同學估計村屋的高度約

是 9 m 至 12 m 不等，由此可計算出電燈柱的高度約是 12 m 至 15 m，結論合理。但選擇估算電燈柱的傾斜角度的同學，大多因繪畫略圖時不依比例或隨意猜測角度約 400 至 700 不等，則計算出電燈柱的高度約是 1 m 至 4 m，這類同學極少留意自己得出的結果是否合理。我們觀察出有些同學的運算能力很強，但他們對角度、高度的空間感則非常薄弱。

## 二、在家課中加入開放題

### 問題（2001 – 2002 中二級）：

選擇普通一種飲料可口可樂，試調查及記錄不同包裝的價格（日期、地點、包裝、價格……等），比較哪一種包裝的飲料最低買？

假設你是班會幹事，你怎樣用 200 元買最多公升的可口可樂呢？

### 回饋

- ◇ 題目設計的原意是讓學生將計算「率」的意義和技巧應用到日常生活中，使學生在現實生活的情況下運用數學的技能作判斷和解決問題，進行理性的行爲。
- ◇ 大部分同學完成習題後均表示喜歡這類型的習作，既生活化且有趣。同學處理這問題時，均能按他／她們資料，判斷哪一種包裝的飲料最抵買，但在處理「怎樣用 200 元買最多公升的可口可樂呢？」時，大多同學只直接運用簡單除法，即將 200 元除以某單一的率，學生忘記了沒有人會賣  $\frac{1}{3}$  支汽水給他們，在處理這類問題時，學生應嘗試以不同的組合來測試，在過程中尋找最優化的方案。但在發還功課時，我們仍通過不斷討論，讓學生深化他們的思考方法與技巧。

## 三、個人或小組協作專題報告

### 問題（建議在 2001 – 2002 年中中二級進行）：

在各種不同形狀的柱體包裝飲料中，尋找出在包裝上最具經濟效益的產品，試整理並簡略書寫你的結論。

備註：為照顧個別差異，如有需要，可向學生提供以下子問題：

1. 「在包裝上最具經濟效益」是甚麼意思？
2. 若同一容積的飲料(例如 250 ml)有甲和乙兩種不同的包裝設計，

甲包裝和乙包裝的所需材料分別為  $100 \text{ cm}^2$  和  $120 \text{ cm}^2$ ，那麼哪一種包裝最具經濟效益呢？為甚麼？

3. 試找出十種不同的形狀的柱體包裝飲料，記錄它們的資料如下。

飲料名稱	所需物料面積 ( $\text{cm}^2$ )	容積 (ml)	所需物料面積 $\div$ 容量	容量 $\div$ 所需物料面積

題目設計的原意是讓學生將計算物件的表面面積、體積或容積（如有需要）、率等的意義和技巧應用到日常生活中，使學生在現實生活的情況下運用數學的技能作判斷和解決問題，加強學生關注周遭的事物，將數學學習生活化。

附件二：

中一題目：

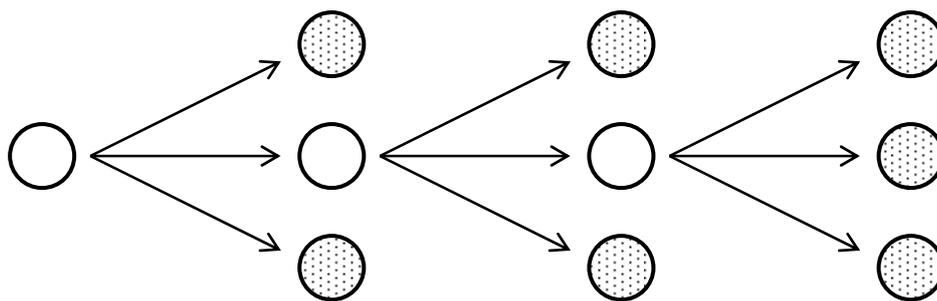
一張紙，第一次把它撕成 3 片，第二次把其中一片撕成 3 片，第三次把其中一片撕成 3 片，以相同的方法繼續下去。

- (a) 當撕第三次後，問共有多少片紙？
- (b) 當撕第五次後，問共有多少片紙？
- (c) 若使用上述方法撕紙，能否得出 30 片紙張呢？為甚麼？

回饋：

大部分答此題的學生都能合理地解決問題，他們的策略大致如下：

- (i) 按照問題作出行動和畫一張圖解，如下：



- (ii) 簡化問題並尋找規律

每次記錄紙張的數量如 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ……

- (iii) 使用代數式的方法

每次撕開紙張後，我們能多得 2 紙張，因此在撕第  $n$  次之後，有紙張  $1 + 2n$  片。

也能夠用上述策略或應用解方程的技巧得知問題「若使用上述方法撕紙，能否得出 30 片紙張呢？」是不可能的。但同學在運用數學語言通過交談的形式將某種數學的構思表達出來時，信心不足。

### 附件三：評鑑表

#### (小組) 問題解決活動評核方法：

在問題解決任務中，以下的項目可作為對學生的評估。以下各項從 0 分（最差）至 3 分（最好）。不同活動可按需要重組下列各評估項目。

項目	得分 (0-3)	文字說明
理解問題	0	空白。 在過程中，只重覆問題。
	1	學生考慮到問題的其中一個限制，但是不能解決問題。 學生因錯誤觀念，而未能正確地解決問題。
	2	學生考慮到問題的多個限制，但是不能解決問題。
	3	學生考慮到問題的全部限制。 解決辦法和全部相應的工作都是正確的。

項目	得分 (0-3)	文字說明
策略的使用	0	學生沒有反應。
	1	學生能選擇一個策略，但不能掌握問題。
	2	學生能使用幾個策略，但不能清楚表達。
	3	學生能有效地使用多個策略。
準確性	0	學生沒有任何正確的計算。
	1	學生有 1 次正確的計算。
	2	學生有 2 次正確的計算。
	3	學生有 3 次或更多的正確計算。
溝通	0	沒有反應。
	1	學生使用不當的文字或符號。 或表達時使人難於理解。
	2	學生能使用部分適當的文字或符號。
	3	學生使用適當的文字或符號，使人容易理解。
態度	0	學生不參與解決問題。
	1	學生嘗試解決問題。
	2	學生能提出意見去建議解決問題。
	3	當學生遇到阻礙時，學生能再思考出解決問題的另一個策略。

## Reference

Schoenfeld, A.H. (1999). *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics*. Berkeley: University of California at Berkeley.