

三階幻方內涵再認識

黃志華

對於下面的三階幻方

2	9	4
7	5	3
6	1	8

我們熟知的性質是：幻方上三條縱線、三條橫線以及兩條對角線上的三個數之和都是 15。

在中國，這個古老幻方還與神話故事連在一起：話說在上古的伏羲時代，黃河裏跳出一匹龍馬，背上負載一幅圖，後人稱爲『河圖』，這個『河圖』就是現代人所說的那個三階幻方。不過，又傳說在夏禹治水時代，洛水裏冒出一頭大龜，背上有一幅圖，名爲『洛書』。這兩幅圖的內容是截然不同的，但到了宋代，因爲著名哲學家朱熹在其論著上把兩幅的名稱對調了，所以現在我們反而習慣把三階幻方稱作『洛書』。

不過，這個來源非常古老的三階幻方，近人卻陸續發現了好些新的性質，使這個小小幻方更添玄奧與神秘感。

由於這些發現頗是零散，筆者嘗試將之整理並集中到一起來，這樣就更顯得洋洋大觀

以下是七種三階幻方的附加性質，都是與等冪和有關的

附加性質一：上（左）邊三數和下（右）邊三數

$$2+9+4=6+1+8$$

$$2^2+9^2+4^2=6^2+1^2+8^2$$

$$2+7+6=4+3+8$$

$$2^2+7^2+6^2=4^2+3^2+8^2$$

附加性質二：兩條中線及對角線

$$951+357+258+654=456+852+753+159$$

$$951^2+357^2+258^2+654^2=456^2+852^2+753^2+159^2$$

進一步有：把附加性質二中的八個數的任一相同數位上的數字都去掉，
剩下來的數字各自組成的八個數仍是二次等冪和，如

$$95+35+25+65=45+85+75+15$$

$$95^2+35^2+25^2+65^2=45^2+85^2+75^2+15^2$$

$$91+37+28+64=46+82+73+19$$

$$91^2+37^2+28^2+64^2=46^2+82^2+73^2+19^2$$

$$51+57+58+54=56+52+53+59$$

$$51^2+57^2+58^2+54^2=56^2+52^2+53^2+59^2$$

更進一步，如果把附加性質二中的八個數的任意兩個相同數位上的數字都去掉，所得的仍是二次等冪和，如

$$9+3+2+6=4+8+7+1$$

$$9^2+3^2+2^2+6^2=4^2+8^2+7^2+1^2$$

附加性質三：三條橫（縱）線

$$294+753+618=816+357+492$$

$$294^2+753^2+618^2=816^2+357^2+492^2$$

$$276+951+438=834+159+672$$

$$276^2+951^2+438^2=834^2+159^2+672^2$$

更進一步，要是把對角線也分成兩族，自左上角到右下角的主對角線及與它平行的兩條折斷對角線稱為主族；自右上角到左下角的副對角線及與之平行的兩條折斷對角線稱為副族，上述的性質依然成立：

主族

$$258+714+693=852+417+396$$

$$258^2+714^2+693^2=852^2+417^2+396^2$$

副族

$$654+213+798=897+312+456$$

$$654^2+213^2+798^2=897^2+312^2+456^2$$

附加性質四：橫（縱）三線上任一相同位置上之二數

一、 $29+75+61=16+57+92=165$

二、 $24+73+68=86+73+42=165$

三、 $94+53+18=81+35+49=165$

四、 $27+95+43=34+59+72=165$

五、 $26+91+48=84+19+62=165$

六、 $76+51+38=83+15+67=165$

其中第二及第五項的等式還有更強的關係，即

$$24^2+73^2+68^2=86^2+37^2+42^2$$

$$26^2+91^2+48^2=84^2+19^2+62^2$$

附加性質五：四角及四稜，(2→4→8→6)，(9→3→1→7)

$$24+48+86+62=26+68+84+42$$

$$24^2+48^2+86^2+62^2=26^2+68^2+84^2+42^2$$

$$24^3+48^3+86^3+62^3=26^3+68^3+84^3+42^3$$

$$93+31+17+79=97+71+13+39$$

$$93^2+31^2+17^2+79^2=97^2+71^2+13^2+39^2$$

$$93^3+31^3+17^3+79^3=97^3+71^3+13^3+39^3$$

以上五種三階幻方的附加性質，都是在國內的書刊中讀到的，而參考了這些附加性質的特點，加上筆者個人的研究，亦有所發現。例如以附加性質五來說，除了(2→4→8→6)，(9→3→1→7)之外，(2→3→8→7)，(1→4→9→6)，(3→4→7→6)，(1→2→9→8)等四種『旋轉(置換)』亦能生出三次等冪和的數組。而以下兩種筆者新得的附加性質，其等冪和的冪次就更高了：

附加性質六：去除中心數斜剖後再結合

$$27+76+61+12+94+43+38+89=98+83+34+49+21+16+67+72$$

$$27^2+76^2+61^2+12^2+94^2+43^2+38^2+89^2=98^2+83^2+34^2+49^2+21^2+16^2+67^2+72^2$$

$$27^3+76^3+61^3+12^3+94^3+43^3+38^3+89^3=98^3+83^3+34^3+49^3+21^3+16^3+67^3+72^3$$

$$27^4+76^4+61^4+12^4+94^4+43^4+38^4+89^4=98^4+83^4+34^4+49^4+21^4+16^4+67^4+72^4$$

$$27+79+94+42+38+86+61+13=31+16+68+83+24+49+97+72$$

$$27^2+79^2+94^2+42^2+38^2+86^2+61^2+13^2=31^2+16^2+68^2+83^2+24^2+49^2+97^2+72^2$$

$$27^3+79^3+94^3+42^3+38^3+86^3+61^3+13^3=31^3+16^3+68^3+83^3+24^3+49^3+97^3+72^3$$

$$27^4+79^4+94^4+42^4+38^4+86^4+61^4+13^4=31^4+16^4+68^4+83^4+24^4+49^4+97^4+72^4$$

附加性質七：上下（左右）邊結合

$$27+76+62+83+34+48=84+43+38+26+67+72$$

$$27^2+76^2+62^2+83^2+34^2+48^2=84^2+43^2+38^2+26^2+67^2+72^2$$

$$27^3+76^3+62^3+83^3+34^3+48^3=84^3+43^3+38^3+26^3+67^3+72^3$$

$$27^4+76^4+62^4+83^4+34^4+48^4=84^4+43^4+38^4+26^4+67^4+72^4$$

$$27^5+76^5+62^5+83^5+34^5+48^5=84^5+43^5+38^5+26^5+67^5+72^5$$

$$29+94+42+81+16+68=86+61+18+24+49+92$$

$$29^2+94^2+42^2+81^2+16^2+68^2=86^2+61^2+18^2+24^2+49^2+92^2$$

$$29^3+94^3+42^3+81^3+16^3+68^3=86^3+61^3+18^3+24^3+49^3+92^3$$

$$29^4+94^4+42^4+81^4+16^4+68^4=86^4+61^4+18^4+24^4+49^4+92^4$$

$$29^5+94^5+42^5+81^5+16^5+68^5=86^5+61^5+18^5+24^5+49^5+92^5$$

此外，筆者還發現， $(1 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 6 \rightarrow 2)$ ， $(7 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4)$ 及 $(1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 2)$ ， $(7 \rightarrow 8 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 9 \rightarrow 4)$ 等四種『旋轉（置換）』也可生出五次等冪和數組來。

不過，當這些附加性質越出越多，筆者亦不免疑惑，有些性質會否附加得太牽強？