Costas 方陣與循環小數

黃志華

距離與方向，是兩個非常古老的概念，事實上，幾何學的起源，正是為了量度距離以及土地面積。至於方向，人類對它的認識也非常早，只是在數學的討論引入方向的概念，則肯定比『距離』遲得多。因為方向往往和正負有關，但人們正式接受負數的概念，卻是很晚近的事情哩！

不過，要是說得準確些，對負數概念遲遲沒法接受的是國外的數學家，我們中國人倒是很早就接受了負數的觀念，建立了正負數的加減計算法則。

據記載，公元三世紀時，希臘數學家丟番圖（Diophantus）在解一個方程時遇到過－4，但把它作為荒謬的東西放棄了。在七世紀，印度數學家婆羅摩及多（Brahmagupta）也放棄了二次方程的一個負根，甚至到了十六、十七世紀，大多數的歐洲數學家都不承認負數，更不要說把負數與生活中的相反量聯繫起來。現在，我們自然對負數的概念習以為常，而且也用以描述諸如氣溫的上升下降，財產的增加與減少，飛機飛行的方位等等。

為何先要強調距離和方向呢？因為本文要談的第一個問題，正是涉及距離和方向的：

方陣構作問題：在一個有 $N \times N$ 個方格的方陣內，選出 N 個方格以滿足如下的條件：① 每行或每列都恰有一個方格被選中，② 所選出的方格，兩兩的距離都不同。

這個方陣構作問題中，若距離的長度相等但方向卻恰好相反，則我們仍視為距離是不同的。以下圖為例：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2		A				E		D	
3				B		C			
4									

圖中 A 格和 B 格的距離與 C 格和 D 格的距離，論長度是相同的，但方向卻是相反的，所以 AB 之間與 CD 之間的距離被視爲是不同的。我們可以用座標相減來確定這一點，如 A 格的座標是 (2，2)，B 格的座標是 (3，4)，於是兩格的座標相減是 (2−3，2−4) = (−1，−2)，而 C 和 D 兩格的座標相減是 (3−2，6−8) = (1，−2)，從這兩回計算所得的答案，我們可知 A 和 B 與 C 和 D 的距離是不同的。另一個不難驗證的事情是，BE 之間和 CD 之間的距離卻肯定是相等的，請讀者自行一算。回說筆者剛提出的一個數學問題，我們該如何去尋出滿足這個方陣構作問題中那兩個條件的方案呢！當 N 不大時，我們還可以用嘗試錯誤的方法求解，例如筆者發覺在 N 是較小的偶數時，可以用『反射』法來構作出解答來。我們來看看下圖：

X		
		X

a

X					
				X	
		X			

b

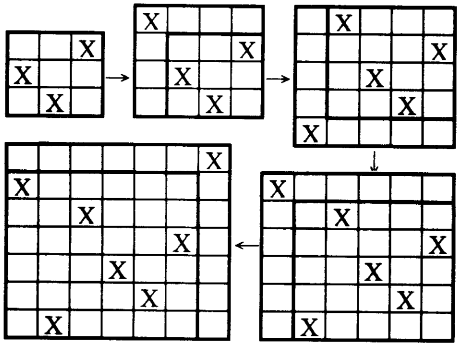
X					
				X	
		X			
					X
	X				
			X		

c

從 a 的 3×3 方陣開始到 c 的 6×6 方陣，相信讀者不難明白筆者所說的『反

射』法的實際操作過程。而 c 方陣就是 N = 6 時的一個完全滿足問題條件的解。

另一種笨辦法是『加角』法，我們且來看看下面的一個實例：



上面這個圖中共有五個方陣，分別是 3×3、4×4、5×5、6×6、7×7，我們且稱之爲 3 至 7 號方陣。只要稍爲留意，便可發覺第 N + 1 號方陣俱是由第 N 號方陣加一個含 x 的角而成的。因此，筆者稱此法爲『加角』法。

可是，不管是用『反射法』還是『加角法』，N 都不能太大，事實上，當 N 大於 10，使用這兩種方法來構作解答，都會感到困難非常。那麼，當 N 大於 10，我們可以怎樣尋求解答？不過讀者讀到這裏，可能開始好奇有關這個方陣構作問題的來源，又或感到它像個智力遊戲問題多於像個數學問題。

然而，這個問題確是一個數學問題，它當初乃是於六十年代中期由工程師 J. P. Costas 提出來的，原本的構想是用於訊號處理，所以這種方陣又名 Costas 方陣。

怎樣比較有把握地構作當 N 大於 10 的 Costas 方陣呢？

筆者可以告訴你，我們要是運用在小學就學過的循環小數的一種性質，

即可以造出當 N 大於 10 的 Costas 方陣，不相信嗎？不要緊，筆者就直接演示一下怎樣用循環小數來造 Costas 方陣。方法如下：首先是找一個單位分數，其分母乃奇素數，設它是 P，而這個單位分數展開後的循環節的長度必須是 $P-1$。

這樣的單位分數，我們最熟悉的自然是 $\frac{1}{7}=0.142857\ldots$。現在，我們用如下的方式取座標：

$0.142857\ldots=\frac{1}{7}$ 於是我們有座標 (1, 1)

$0.428571\ldots=\frac{3}{7}$ 於是我們有座標 (2, 3)

$0.285714\ldots=\frac{2}{7}$ 於是我們有座標 (3, 2)

$0.857142\ldots=\frac{6}{7}$ 於是我們有座標 (4, 6)

$0.571428\ldots=\frac{4}{7}$ 於是我們有座標 (5, 4)

$0.714285\ldots=\frac{5}{7}$ 於是我們有座標 (6, 5)

於是，我們得到一個如下圖的 6×6 Costas 方陣：

	1	2	3	4	5	6
1	X					
2			X			
3		X				
4						X
5				X		
6					X	

還不信嗎？

那麼請你試試 $\frac{1}{7}$之後，另一個符合條件的分數 $\frac{1}{17}$，它展爲循環小數後是 0.0588235294117647…，接著是 $\frac{1}{19}$，它展爲循環小數後是 0.052631578947368421…。

相信，仿照以上的方法，各位讀者用循環小數不難構作出 16×16 和 18×18 的 Costas 方陣。也不必懷疑了，無論 P 有多大，只要它符合條件，就一定能成功的。還有一點值得留意的是，用這『循環小數法』造出來的 Costas 方陣，道理上是也可以用『反射法』造出來的。

不過，符合以上條件的奇素數，相比起自然數集來說，委實太稀少了，例如在 200 以內，只有 7，17，19，23，29，47，59，61，97，109，113，131，149，167，179，181，193，如此而已。那麼，除了『循環小數法』，我們還可以有別的方法來造 Costas 方陣嗎？

可以告訴你，要完全解決 Costas 方陣的構作問題，殊不容易，至今數學家還只是對某些特殊的 N 找到解決方法。不過讀者們應會大大感到意外的是，數學家所用以解決的方法，竟是跟我們早在小學(又是小學的東西)就學會的餘數概念有關！所以，數學的魅力常常就在於看來風馬牛不相及的東西卻有千絲萬縷的內在聯繫。還有，我們常常因爲很多在小學學過的數學概念，往往在整個中學裏都不會再接觸到使用到，以至認爲這些概念很沒用，但實際上是我們遠遠沒有認識清楚它們。

接下來，筆者便向大家介紹數學家解決 Costas 方陣的另一種方法，但我們還得多認識兩個數學概念：剩餘類和元根。這兩個概念都是建基於數學家對餘數概念的研究和拓展。

首先，我們都不難想像，某正整數 M 被 N 除要是有餘數，則這個餘數只能是從 1、2、3 … 至 (N − 1) 這 N − 1 個數中的其中一個。因而我們可以說，數 N 的剩餘類共有 N − 1 個，而且僅有 N − 1 個。至於元根，其定

義需要多一點的數論知識才能說得清楚，這裏只能直接介紹它的一種優美性質：如果數 a 是奇素數 P 的元根，則當 a^1、a^2、a^3 … a^{N-1} 分別被奇素數 P 除，其餘數恰好都不同，即 P 的 P − 1 個剩餘類都俱全。據數學家研究，所有奇素數都一定存在元根哩！

明白了剩餘類和元根的概念及性質，要介紹解決 Costas 方陣的其中一種方法就很容易了。以奇素數 13 爲例，據知 2 是 13 的一個元根，作如下的計算：

$2^1 \div 13$	餘數爲 2	意味我們有座標 (2，1)
$2^2 \div 13$	餘數爲 4	意味我們有座標 (4，2)
$2^3 \div 13$	餘數爲 8	意味我們有座標 (8，3)
$2^4 \div 13$	餘數爲 3	意味我們有座標 (3，4)
$2^5 \div 13$	餘數爲 6	意味我們有座標 (6，5)
$2^6 \div 13$	餘數爲 12	意味我們有座標 (12，6)
$2^7 \div 13$	餘數爲 11	意味我們有座標 (11，7)
$2^8 \div 13$	餘數爲 9	意味我們有座標 (9，8)
$2^9 \div 13$	餘數爲 5	意味我們有座標 (5，9)
$2^{10} \div 13$	餘數爲 10	意味我們有座標 (10，10)
$2^{11} \div 13$	餘數爲 7	意味我們有座標 (7，11)
$2^{12} \div 13$	餘數爲 1	意味我們有座標 (1，12)

根據這組座標數據，我們便可以構作出一個如下圖所示的 12×12 的 Costas 方陣：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												X
2	X											
3				X								
4		X										
5									X			
6					X							
7											X	
8			X									
9								X				
10										X		
11							X					
12						X						

我們可以看到，這個 12×12 方陣是能夠用『反射法』構造出來的，只是，我們很難確定它的初始形式，反而利用元根和剩餘類的美妙性質，卻可以不假思索便算出每一格的座標！事實上，數學家已經證明，必然存在及能夠構作 $(P-1)\times(P-1)$ 和 $(P-2)\times(P-2)$ 的 Costas 方陣，當中 P 是奇素數，假如 2 是這個奇素數的元根，那麼更存在及能夠構作 $(P-3)\times(P-3)$ 的 Costas 方陣。此外，根據有限域的理論，還可證明存在及能夠構作 $(P^n-2)\times(P^n-2)$ 的 Costas 方陣。

這些用『元根法』造方陣的結果，足夠讓我們興奮好些時間，但遺憾的是我們還沒能夠確定是否對任一自然數 N，都存在 N×N 的 Costas 方陣。

寫到這裏，筆者應該交代一下，之前所介紹的『循環小數法』，嚴格來說只是『元根法』的特例而已。事實上，在數論中，循環小數與元根是息息相關，數學家也早就發現，對於任一分數，若其分母 P 是奇素數，而此分數展開後其循環小數的循環節恰好長 $(P-1)$，則 10 必是這個奇素數 P 的元根！換句話說，使用『循環小數法』就相當於以某個奇素數的元根 10 來造方陣。

Costas 方陣談到此已經說得差不多，現在要集中談談本文的第二主角：

『循環小數』。循環小數有不少美妙的性質，只是我們的數學課本中卻很少提到這些東西，真是遺憾！

以下這個有關循環小數的性質，是數學家很早就知道的。以實例來說，我們可以先作這樣的展示：

$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$　　$142+857=999$

$\frac{1}{17}=0.\dot{0}58823529411764\dot{7}$　　$05882352+94117647=99999999$

$\frac{1}{19}=0.\dot{0}5263157894736842\dot{1}$　　$052631578+947368421=999999999$

$\frac{1}{23}=0.\dot{0}43478260869565217391\dot{3}$

$04347826086+95652173913=99999999999$　…

一般地說，對於那些分母是奇素數 P，而且其循環節的長度恰是 P－1 的循環小數，其循環節的前半與後半相加，所得的便是全由 9 組成的數字。要證明這個必然現象，我們還得運用元根的性質。可不要忘記，我們在上文用元根的性質來造出來的 Costas 方陣，也很具對稱性的。比方說上文中以分母爲七的循環小數 造出來的 6×6 Costas 方陣，那六個含 X 的格的橫座標的順序是 132645，而 132 + 645 乃是 777。另一個我們直接用元根法造出來的 12×12 Costas 方陣，亦有同樣的對稱性質，只是這性質卻體現在縱座標上：前六個含 X 的格的縱座標的順序是 2，4，8，3，6，12；後六個含 X 的格的縱座標的順序是 11，9，5，10，7，1。將對應的數字相加你會發覺全是等於 13。即有

	2	4	8	3	6	12
+)	11	9	5	10	7	1
	13	13	13	13	13	13

事實上，以元根造出的 Costas 方陣的對稱性，跟上述的循環小數的對稱性，完全是同一回事！我們且試做下面的觀察，以分母爲七的循環小數造出來的 6×6 Costas 方陣，那六個含 X 的格的橫座標的順序是 132645，於是

$\frac{1}{7}$ 的循環節是 142857，$\frac{6}{7}$ 的循環節是 857142　　　$142857 + 857142 = ?$

$\frac{3}{7}$ 的循環節是 428571，$\frac{4}{7}$ 的循環節是 571428　　　$428571 + 571428 = ?$

$\frac{2}{7}$ 的循環節是 285714，$\frac{5}{7}$ 的循環節是 714285　　　$285714 + 714285 = ?$

這裏所呈現的規律，亦足以顯示 Costas 方陣的對稱性跟循環小數的對稱性，是同一回事。

寫到這裏，想起馮振業先生在上期本刊談到的 $0.\dot{9}=1$ 的問題，其實任何兩個互補的循環小數(不管是純循環小數還是混循環小數)相加，得數總是 $0.\dot{9}$，但是把它們相應的分數相加，得數卻總是 1，以上面的例子來說，其中一例就是 $0.\dot{4}2857\dot{1}+0.\dot{5}7142\dot{8}=0.\dot{9}$ 而它們的相應分數是 $\frac{3}{7}$ 與 $\frac{4}{7}$，其和乃是 1。以這樣的方式來證明 $0.\dot{9}=1$，對於高年班的小學生來說相信是更加形象些熟悉些。

要嚴謹一點，我們的證明應該這樣寫：

任意寫出一個小於 $0.\dot{9}$ 的純循環小數(混循環小數也是可以的，只是情況較複雜，讀者可自行嘗試)，比方說是 $0.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_s$，現設

$$0.\dot{9}-0.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_s=0.\dot{b}_1b_2\cdots\dot{b}_s$$

則不難推知　$a_1a_2\cdots a_s+b_1b_2\cdots b_s=99\cdots9=10^s-1$。由於把 $0.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_s$ 和

$0.\dot{b}_1 b_2 \cdots \dot{b}_s$ 分別化爲分數乃是 $\dfrac{a_1 a_2 \cdots a_s}{10^s - 1}$ 和 $\dfrac{b_1 b_2 \cdots b_s}{10^s - 1}$，而

$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_s}{10^s - 1} + \frac{b_1 b_2 \cdots b_s}{10^s - 1} = \frac{10^s - 1}{10^s - 1} = 1 ,$$

所以 $0.\dot{9} = 1$。

也許有人會問，那麼爲何要是 $0.\dot{9} - 0.\dot{a}_1 a_2 \cdots \dot{a}_s$ 而不是 $1 - 0.\dot{a}_1 a_2 \cdots \dot{a}_s$？則筆者只能答，爲了便於處理，我們要把 1 化成不同的形式，正如爲了計算 $1 - \dfrac{2}{27}$，我們要先把 1 化成 $\dfrac{27}{27}$，又或者當中學生要解一些三角函數問題，須把 1 化爲 $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ 或 $\tan 45^\circ$ 等等。

由於想文章簡短一點，上面的證明中不少地方都沒有下精確的定義，請讀者見諒！不過，上述的證明對於小學生來說，也許還是感到有些詭異神秘，畢竟，循環小數是小學生幾乎唯一可以接觸到無窮這個概念的數學命題，初次感受到無窮與有限是如此的不同。

猶記筆者讀小學的時代，數學老師教到循環小數的時候，總是只談方法和公式，卻不談證明，例如她會告訴我們，把一個純循環小數化成分數是很容易的，因爲方法就是把這個小數的循環節做分子，再看看它的循環節有多長，就在分母的位置上加上相同長度的 9 字，但這個方法爲何行得通，原理是甚麼，卻從沒有解釋，大抵是認爲說了我們這些小學生也未必明白。

上文提到以混循環小數來做上面的證明，情況會較複雜，這是因爲從混循環小數化成分數，其方法本身就比較複雜。但這裏很想向大家介紹一下，近年已有人發現一個很便捷的方法來把混循環小數化成分數，去年，國內著名科普作家談祥柏先生就曾在某刊物上談及，並以『應該有個下聯』爲文章的題目，比喻這個新方法跟把純循環小數化爲分數的方法一樣乾脆利

落，二者就像上下聯般互相匹配、互相呼應。爲了省篇幅，下面只以實例來說明：

例一　化 $0.11841\dot{2}\dot{7}$ 爲分數。

答：$\dfrac{1184127-11841}{9900000}=\dfrac{65127}{550000}$

例二　化 $0.1997\dot{2}00\dot{1}$ 爲分數。

答：$\dfrac{19972001-1997}{99990000}=\dfrac{1664167}{8332500}$.

例三　化 $0.336\dot{2}783\dot{1}$ 爲分數。

答：$\dfrac{33627831-336}{99999000}=\dfrac{2241833}{6666600}$

<u>規律</u>：$\dfrac{(\text{不循環部份連同循環節})-(\text{不循環部份})}{(\text{個數與循環節相同})\text{個9後加}(\text{個數與不循環部份長度相同})\text{個0}}$

這個方法既快捷又不難記得住，只是目前還不是有很多人知道，一般教科書用的還是舊的那種較複雜繁瑣的方法。

結束本文前，筆者還想多介紹分母爲奇素數 P，循環節的長度是 P－1 的循環小數的另一美妙性質：在其循環節中，1，4，2，8，5，7 這六個數字出現的次數相等，3，6 出現的次數相等，0，9 出現的次數相等。

又不相信嗎？我們何妨就拿上舉的幾個全屬這一類的循環小數來作實際檢驗，看看各個數字的出現次數是否如上所述。

值得一提的是，這個美妙性質算是一個頗新的發現，乃是近年首先由一位國內的業餘數學愛好者蔡爾謙先生首先指出的，他發覺的是在分母爲奇素數 P，循環節的長度是 P－1 的循環小數中，其循環節中 1，4，2，8，5，

7 這六個數字的出現次數總是相等的，但他本人沒能給予證明，後來一些專業數學工作者不約而同的僅利用初等數論的方法就證明了這一點，並且把命題加強如上。一位數學工作者黃利兵還給出了簡易的公式去計算 0 至 9 各個數字在這種循環小數的循環節中的具體出現次數哩！公式可見下表：

P 的個位數	0，9 出現的次數	3，6 出現的次數	1，2，4，5，7，8 出現的次數
1	[P/10]	[P/10]	[P/10]
3	[P/10]	[P/10]＋1	[P/10]
7	[P/10]	[P/10]	[P/10]＋1
9	[P/10]	[P/10]＋1	[P/10]＋1

按：這個表中，[X]乃是表示不超過 X 的最大整數，例如 [0.618]＝0，[3.1416]＝3，[15]＝15，[216.02437]＝216 等等。

由這些新近才得以發現的循環小數性質或算法可知，即使是在初等數學的範疇裏，也還有很多未知的事情有待大家來發掘，只要有鍥而不捨的精神，加上一定的數學素養，就總會有一天尋得尚未有人到過的美麗新景點。

寫本文的目的是希望能讓小學同學有更廣闊的數學視野，事實上若再把本文的內容說得淺白點形象點，那是高年級小學生都會了解和感興趣的東西。又，本文所述的材料，主要是由香港大學的蕭文強博士、上海教育出版社的葉中豪先生和廣州的業餘數學愛好者韓湛新先生所提供的，謹此致以深切的謝意！