

$$\frac{4}{5} \div 3$$

思維實驗與教學發展

分數乘除

$$6 \times \frac{2}{3}$$

講者：鍾保珠
聖公會聖約翰小學

$$\frac{5}{4} \div \frac{3}{2}$$

思維實驗與教學發展

分數乘除

學習難點

藉着思維實驗，幫助構思教學，
發展數學教育

“Thought-experiments as instruments of educational development.”
Freudenthal, H. (1991). Revisiting mathematics education: China lectures

要令學生學好，必須認真設計教學過程

先預測學生的反應

將設計帶入課堂作出比較

改良教學設計

分數乘法

分數乘法

5 個 $\frac{1}{8}$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

算式： $\frac{1}{8} \times 5$

為什麼？

12 的 $\frac{1}{3}$

○ ○ ○

老師直接說出意思？

算式： $12 \times \frac{1}{3}$

12 的 $\frac{1}{3}$ (倍)

學生推論？

分數乘法

學生推論

P.3已有知識



$$12 \text{ 的 } \frac{1}{3} = ?$$

12粒均分3份
取一份

$$12 \text{ 的 } \frac{2}{3} = ?$$

·
·
·

12粒均分3份
取一份的2倍

$$12 \text{ 的 } \frac{3}{3} = ?$$

$$12 \text{ 的 } \frac{9}{3} = ?$$

分數乘法

學生推論

P.3已有知識



$$12 \text{ 的 } \frac{1}{3} = 4$$

$$12 \text{ 的 } \frac{2}{3} = 8$$

$$12 \text{ 的 } \frac{3}{3} = 12$$

$$12 \text{ 的 } \frac{4}{3} = 16$$

$$12 \text{ 的 } \frac{5}{3} = 20$$

$$12 \text{ 的 } \frac{6}{3} = 24$$

$$12 \text{ 的 } \frac{7}{3} = 28$$

$$12 \text{ 的 } \frac{8}{3} = 32$$

$$12 \text{ 的 } \frac{9}{3} = 36$$

分數乘法

已有知識
學生推論



$$12 \text{ 的 } \frac{3}{3} = 12$$

$$12 \text{ 的 } \frac{6}{3} = 24$$

$$12 \text{ 的 } \frac{9}{3} = 36$$

分數乘法

已有知識
學生推論

影片 1.1

影片 1.2

$$12 \text{ 的 } \frac{3}{3} = 12$$

$$12 \times 1 = 12$$

$$12 \text{ 的 } \frac{6}{3} = 24$$

$$12 \times 2 = 24$$

與乘法結果
一致

$$12 \text{ 的 } \frac{9}{3} = 36$$

$$12 \times 3 = 36$$

分數乘法

$$6 \text{ 的 } \frac{2}{3}$$

$$= 6 \times \frac{2}{3}$$

$$= 6 \div 3 \times 2$$

$$= 4$$

理解後

透過已有知識
計算答案

分數乘法概念

練習

$$16 \text{ 的 } \frac{7}{8}$$

$$8 \text{ 的 } 1\frac{3}{4}$$

分數乘法

6 的 $\frac{2}{3}$

$$= 6 \times \frac{2}{3}$$

$$= 6 \div 3 \times 2$$

$$= 4$$



6個 $\frac{1}{7}$ 粒均分3份

取1份



被乘數是分數

$\frac{6}{7}$ 的 $\frac{1}{3}$

$$= \frac{6}{7} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{6}{7} \div 3 \times 1$$

$$= \frac{2}{7}$$

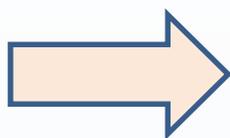
單位分數入手

影片 1.3

影片 1.51

分數乘法

$$\frac{6}{7} \times \frac{1}{3}$$



$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{6}{7} \div 3 \times 1$$

$$= \frac{4}{5} \div 3 \times 2$$

$$= \frac{2}{7}$$



4個 $\frac{1}{5}$ 不能均分3份

如何解決?



影片 1.52

分數乘法

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$$

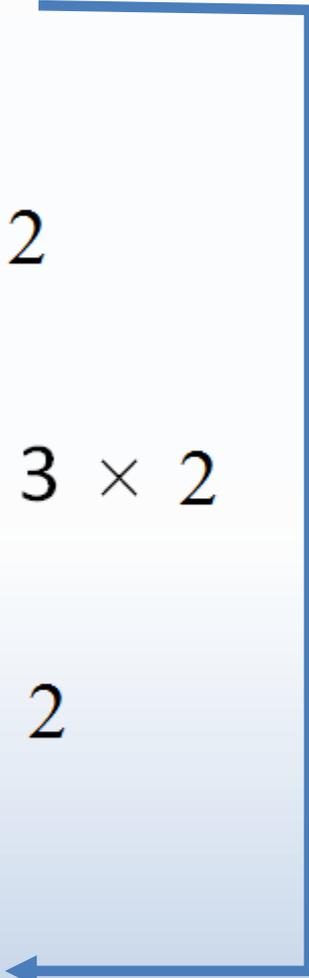
$$= \frac{4}{5} \div 3 \times 2$$

擴分

$$= \frac{4 \times 3}{5 \times 3} \div 3 \times 2$$

發現

$$= \frac{4}{5 \times 3} \times 2$$

$$= \frac{4 \times 2}{5 \times 3}$$


分數除法



《不帶餘除法的推廣》馮、陳、鍾

分數除法(均分)

均分整數

$$\frac{4}{5} \div 2$$

4個 $\frac{1}{5}$ 均分2份

$$= \frac{2}{5}$$

即分數乘法概念

$$= \frac{4}{5} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4}{5} \div 2 \times 1$$

$$\frac{4}{5} \div 3$$
$$= \frac{4 \times 3}{5 \times 3} \div 3$$

擴分

$$= \frac{4}{15}$$

分數除法(均分)

均分分數

均分整數份的概念



均分分數份的概念

均分分數

分數除法(均分)

均分整數份的概念

推廣



分數份

平均分成2包

容易明白

1) 2包糖有8粒，1包糖有多少粒？

列寫算式： $8 \div 2$

意思→ 8粒糖即是2包，1包糖有多少粒？

平均分成 $\frac{2}{3}$ 包

較難理解

2) $\frac{2}{3}$ 包糖有8粒，1包糖有多少粒？

列寫算式： $8 \div \frac{2}{3}$

意思→ 8粒糖即是 $\frac{2}{3}$ 包，1包糖有多少粒？

找出一種對「均分」的詮釋
容易令人接受

- ✓ 均分整數份
- ✓ 均分分數份

均分分數

分數除法(均分)

找出一種對「均分」的詮釋
容易令人接受

- ✓ 均分整數份
- ✓ 均分分數份

2) $\frac{2}{3}$ 包糖有 8 粒，1 包糖有多少粒？

意思→ 8 粒糖 即是 $\frac{2}{3}$ 包，1 包糖有多少粒？

如何理解

列寫算式： $8 \div \frac{2}{3}$

以畫圖方式表達 $\frac{2}{3}$ 包

$\frac{2}{3}$ 包是 2 個 $\frac{1}{3}$ 包
(即是 2 個小格)



↓ 即是 2 個 $\frac{1}{3}$ 包



均分分數

分數除法(均分)

找出一種對「均分」的詮釋
容易令人接受
✓ 均分整數份
✓ 均分分數份

2) $\frac{2}{3}$ 包糖有 8 粒，1 包糖有多少粒？

意思→ 8 粒糖 即是 $\frac{2}{3}$ 包，1 包糖有多少粒？

如何理解

列寫算式： $8 \div \frac{2}{3}$

以畫圖方式表達 $\frac{2}{3}$ 包

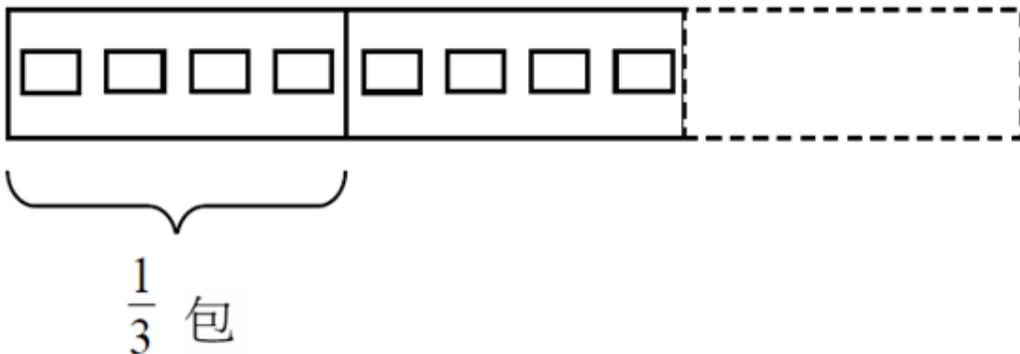
$\frac{2}{3}$ 包是 2 個 $\frac{1}{3}$ 包

(即是 2 個小格)

每小格 (即 $\frac{1}{3}$ 包) 有
糖 $8 \div 2$ 粒

此數的 3 倍，就是 1 包的數量，
1 包有糖 $(8 \div 2 \times 3)$ 粒

↓ 即是 2 個 $\frac{1}{3}$ 包

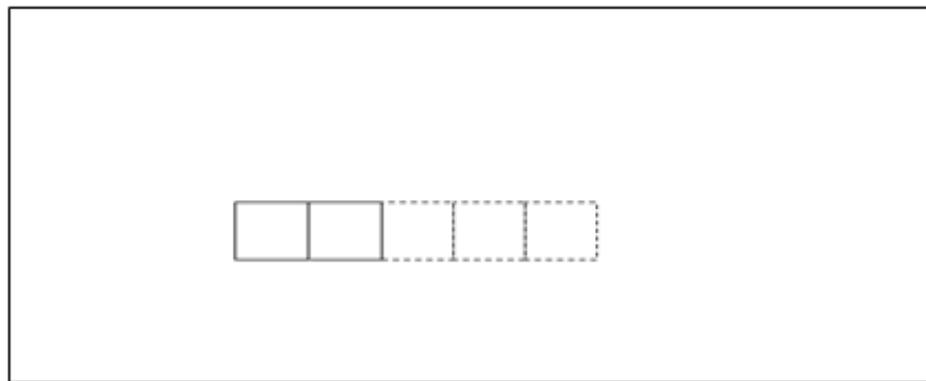


多做幾題練習 有所發現
與分數乘法定義一樣

練習

3) $\frac{2}{5}$ 包糖有 8 粒，1 包糖有多少粒？

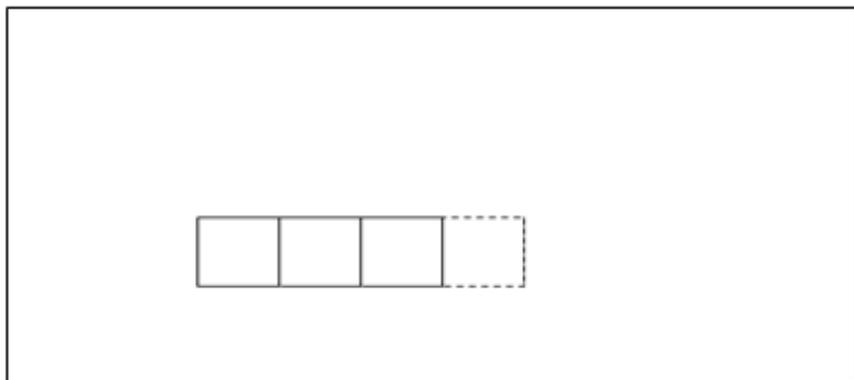
意思→ _____ 即是 _____，1 包糖有多少粒？ 列式：_____



1 包糖有→ _____

*4) $\frac{3}{4}$ 包朱古力有 9 粒，1 包朱古力有多少粒？

意思→ _____ 即是 _____，1 包朱古力有多少粒？ 列式：_____



1 包朱古力有→ _____

均分分數

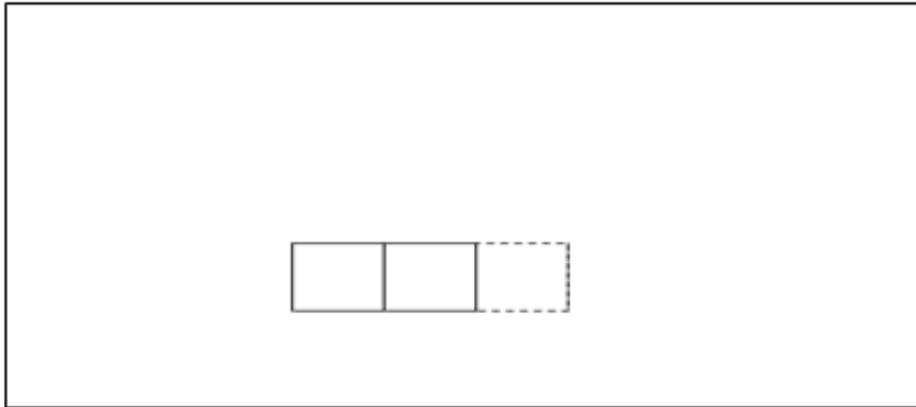
分數除法(均分)

練習

**5) $\frac{2}{3}$ 包朱古力有 10 粒，1 包朱古力有多少粒？

意思→ _____ 即是 _____，1 包朱古力有多少粒？ 列式：_____

1 包朱古力有→ _____



均分分數

$$8 \div \frac{2}{3}$$

~~$$= 8 : 2 \times 3$$~~

$$= 8 \times \frac{3}{2}$$

$$8 \div \frac{2}{5}$$

~~$$= 8 : 2 \times 5$$~~

$$= 8 \times \frac{5}{2}$$

分數除法(均分)

按分數乘法的定義：

$$c \div b \times a = c \times \frac{a}{b}$$

$$a \div \frac{b}{k} \quad (b, k > 0)$$

$$= a \times \frac{k}{b}$$

當被除數是整數或分數時

$$9 \div \frac{3}{4}$$

~~$$= 9 \div 3 \times 4$$~~

$$= 9 \times \frac{4}{3}$$

$$10 \div \frac{2}{3}$$

~~$$= 10 \div 2 \times 3$$~~

$$= 10 \times \frac{3}{2}$$

均分分數

分數除法(均分)

$$8 \div \frac{2}{3}$$

$$= 8 \div 2 \times 3$$

$$= 8 \times \frac{3}{2}$$

$$8 \div \frac{2}{5}$$

$$= 8 \div 2 \times 5$$

$$= 8 \times \frac{5}{2}$$

按分數乘法的定義：

$$c \div b \times a = c \times \frac{a}{b}$$

$$a \div \frac{b}{k} \quad (b, k > 0)$$

$$= a \times \frac{k}{b}$$

當被除數是整數或分數時
利用計算法則
「被除數不變，除號轉乘號，
除數的分子分母顛到」

$$9 \div \frac{3}{4}$$

$$= 9 \div 3 \times 4$$

$$= 9 \times \frac{4}{3}$$

$$10 \div \frac{2}{3}$$

$$= 10 \div 2 \times 3$$

$$= 10 \times \frac{3}{2}$$

分數除法(包含)

緊扣四句等價命題

1. $a \div b = c$ 。
2. a 包含 c 個 b 。
3. a 是 b 的 c 倍。
4. 以 b 為 1 個單位， a 即相當於 c 個單位。

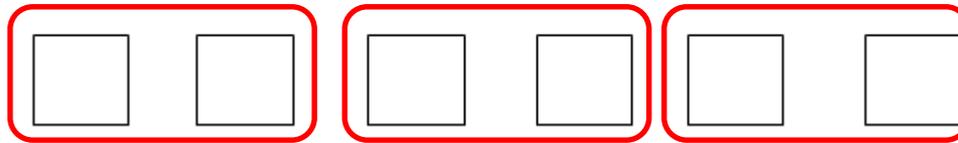
分數除法(包含)

情況一

被除數和除數都是整數，而且被除數是除數的倍數

畫圖理解

1) 6塊朱古力，每2塊一包，共有()包。



$$\begin{aligned} & (6) \div (2) && \text{即 } 6 \text{ 包含 } (3) \text{ 個 } 2 \\ = & (3) && \text{或 } 6 \text{ 是 } 2 \text{ 的 } (3) \text{ 倍} \end{aligned}$$

緊扣四句等價命題



分數除法(包含)

情況二

被除數和除數都是整數，但被除數不是除數的倍數

2) 5塊朱古力，每2塊一包，共有()包。

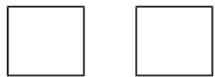


$$\begin{aligned} & (\quad) \div (\quad) && \text{即 } 5 \text{ 包含 } (\quad) \text{ 個 } 2 \\ = & (\quad) && \text{或 } 5 \text{ 是 } 2 \text{ 的 } (\quad) \text{ 倍} \\ = & (\quad) \end{aligned}$$

確立關係式

$$a \div b = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

3) 2塊朱古力，每3塊一包，共有()包。



$$\begin{aligned} & (\quad) \div (\quad) && \text{即 } 2 \text{ 包含 } (\quad) \text{ 個 } 3 \\ = & (\quad) && \text{或 } 2 \text{ 是 } 3 \text{ 的 } (\quad) \text{ 倍} \end{aligned}$$

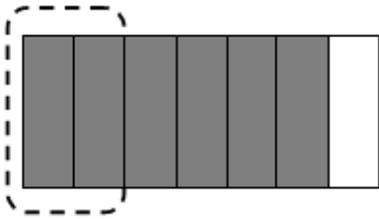
影片2.3

分數除法(包含)

情況三

被除數和除數都是同分母分數

$\frac{6}{7}$ 張紙，以 $\frac{2}{7}$ 張紙為一份，共包含了()份。



單位分數



整數除法

6 個單位是 2 個單位的多少倍

$$\frac{6}{7} \div \frac{2}{7}$$

即 $\frac{6}{7}$ 包含 () 個 $\frac{2}{7}$

= () 或 $\frac{6}{7}$ 是 $\frac{2}{7}$ 的 () 倍

當同分母分數相除時，
→ 分子依序相除

分數除法(包含)

情況四

被除數和除數是異分母分數

$$\begin{aligned} & \frac{5}{7} \div \frac{2}{3} \\ &= \frac{5 \times 3}{7 \times 3} \div \frac{2 \times 7}{3 \times 7} \quad (\text{通分}) \\ &= \frac{5 \times 3}{2 \times 7} \quad (\text{分子依序相除}) \\ &= \frac{5 \times 3}{7 \times 2} \quad (\text{乘法交換性質}) \\ &= \frac{5}{7} \times \frac{3}{2} \end{aligned}$$

通分



同分母分數相除的情況



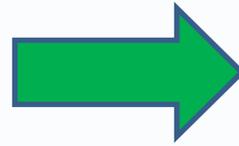
看到顛倒相乘的法則

總結

頗具深度的數學歷程

整數的乘法和除法

推廣至



分數的乘法和除法

初小對整數乘除法的理解

過渡到

五年級對整數乘除法的理解

進行思維實驗，

教學活動從學生角度出發，

猜想他們在老師引導之下，

教學設計可以怎樣將數學知識再創造出來。

參考資料

1. Freudenthal, H. (1991). Revisiting mathematics education: China lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Pub
2. 馮振業、陳玄玉、鍾保珠(2014)。不帶餘餘法的推廣《數學教育》37期, 15-24